

**Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады  
студентов по теоретической механике**

**Казань, КГЭУ, 25-29 ноября 2019 г.**

**Задачи теоретического конкурса**

*Задача С1 (7 баллов).* Стержневая система расположена в вертикальной плоскости (рис. 1).

1). Однородный стержень  $AB$  имеет вес  $P$  (рис. 1а). Весом стержня  $BC$  пренебрегаем. Задан угол  $\alpha$ . Определите реакцию шарнира  $C$ . (3 балла)

2). Однородные стержни  $AB$  и  $BC$  имеют веса  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно,  $P_1 > P_2$  (рис. 1б). Стержень  $BC$  опирается на шероховатую поверхность в точке  $C$ . При каком значении коэффициента трения  $f$  система будет в равновесии, если  $\alpha = 45^\circ$ ? (4 балла)

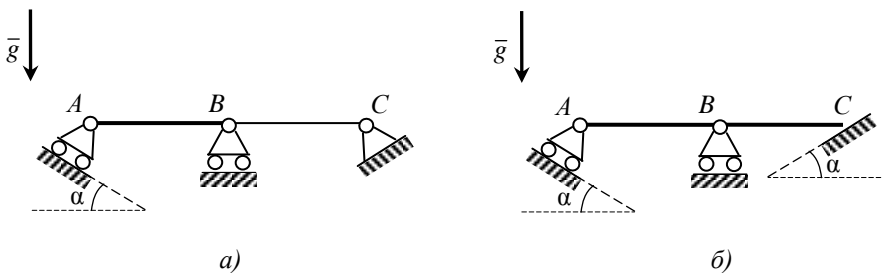


Рис. 1

**Задача С2** (9 баллов). Тяжелый тонкий диск  $I$  опирается на круглый конус  $2$  пренебрежимо малой массы. Диск имеет вертикальную ось вращения с подшипниками  $C$  и  $D$ . Линия этой оси проходит через вершину  $O$  конуса. Конус имеет горизонтальную ось вращения с подпятником  $A$  и подшипником  $B$ . В точке  $K$  контакта обода диска и конуса пренебрегаем трением в направлении образующей  $OE$  конуса, а в перпендикулярном ему направлении (параллельном координатной оси  $x$ ) проскальзывание отсутствует. К концу нити, сходящей с окружности основания конуса ( $EL \parallel x$ ) и переброшенной через блок, подвешен груз веса  $P$ . Радиус основания конуса равен  $R$ . Расстояние от подпятника  $A$  до центра  $H$  основания конуса равно  $a$ . Расположение опор  $B, C, D$  фиксировано. Высота  $OH$  конуса и, соответственно, расположение подпятника  $A$ , а также радиус диска подобраны так, чтобы при равновесии системы величина силы реакции подшипника  $B$  была минимально возможной. Какова при этом величина момента  $M$  пары сил, приложенных к диску в его плоскости?

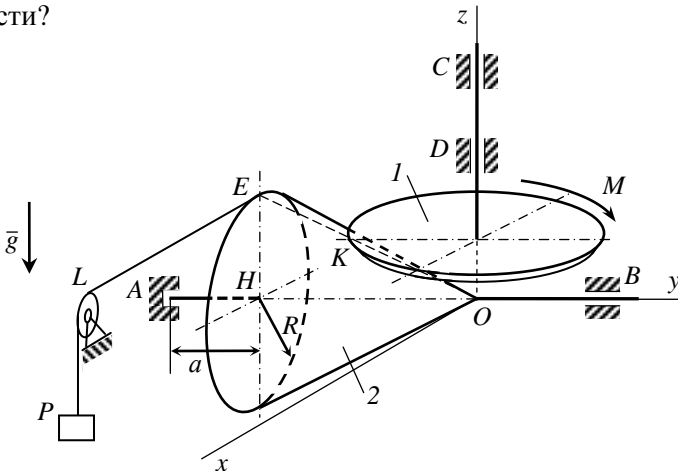


Рис. 2

**Задача К1** (5 баллов). Диски 1 и 2 одинакового радиуса  $R$  соединены цилиндрическим шарниром  $A$  (рис. 3). Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси  $O$ . Движение диска 2 ограничено двумя протяженными вертикальными гладкими поверхностями. (Диск 2 движется вверх диска 1 в параллельной плоскости.)  $AB$  – диаметр диска 2. Считая, что диск 1 совершает не менее одного полного оборота, найдите в системе координат  $Oxy$  уравнение траектории точки  $B$ . Определите также, в каком диапазоне при этом меняется величина  $\omega_1$  угловой скорости диска 1, если точка  $B$  движется с постоянной скоростью, равной по величине  $v$ ? Ответ строго обоснуйте.

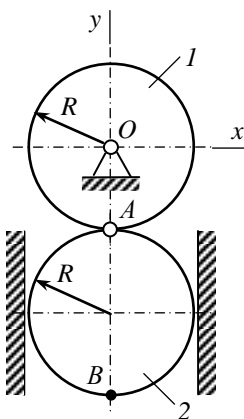


Рис. 3

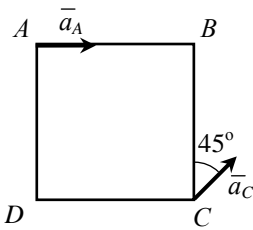
**Задача К2** (9 баллов).

1). Определите угловую скорость квадратной пластины  $ABCD$  с длиной стороны  $l$ , если  $a_A = a$ , направления ускорений  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_C$  точек  $A$  и  $C$  указаны на рисунке (рис. 4а). (3 балла)

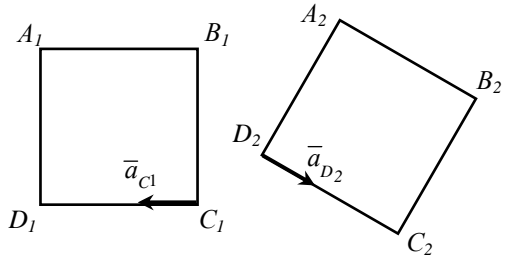
2). Две одинаковые квадратные пластины  $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$  движутся в плоскости рисунка (рис. 4б). В некоторый момент величины угловых скоростей, угловых ускорений и ускорений вершин

пластин 1 и 2 удовлетворяют условиям:  $\frac{\omega_1^2}{\varepsilon_2} = \frac{a_{A_1}}{a_{A_2}} = \frac{a_{B_1}}{a_{B_2}} = 1$  (сами

величины не заданы),  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ . При этом вектор  $\vec{a}_{C_1}$  направлен к точке  $D_1$ , а вектор  $\vec{a}_{D_2}$  ( $a_{D_2} \neq 0$ ) направлен к точке  $C_2$ . Найдите отношения  $a_{C_1}/a_{C_2}$  и  $a_{D_1}/a_{D_2}$ . (6 баллов)



а)



б)

Рис. 4

**Задача Д1 (10 баллов).**

1). Материальная точка подвешена на двух одинаковых пружинах (рис. 5а). При недеформированном состоянии пружин, что соответствует положению  $O$  материальной точки, пружины имеют длины  $R$ . При равновесии материальной точки в положении  $A$  длины пружин равны  $2R$ . Какова минимальная величина скорости, которую нужно придать вдоль вертикали материальной точке в начальном положении  $A$ , чтобы она достигла положения  $O$ ? (3 балла)

2). Неподвижное тонкое кольцо радиуса  $R$  расположено в горизонтальной плоскости (рис. 5б). Материальная точка подвешена на одинаковых невесомых тонких нитях, концы которых прикреплены к кольцу равномерно по всей его окружности. Расстояния между концами соседних нитей считаем пренебрежимо малыми. Нити могут упруго растягиваться (силы упругости пропорциональны удлинениям нитей). В нерастянутом состоянии нити имеют длины  $R$ . При равновесии материальной точки в положении  $A$  их длины равны  $2R$ . Какова минимальная величина скорости, которую нужно придать материальной точке в начальном положении  $A$ , чтобы она достигла положения  $B$  на кольце? При этом считаем, что на материальную точку дополнительно наложили идеальную связь, позволяющую ей перемещаться лишь вдоль отрезка  $AB$ . (На рисунке эта связь не указана.) (7 баллов)

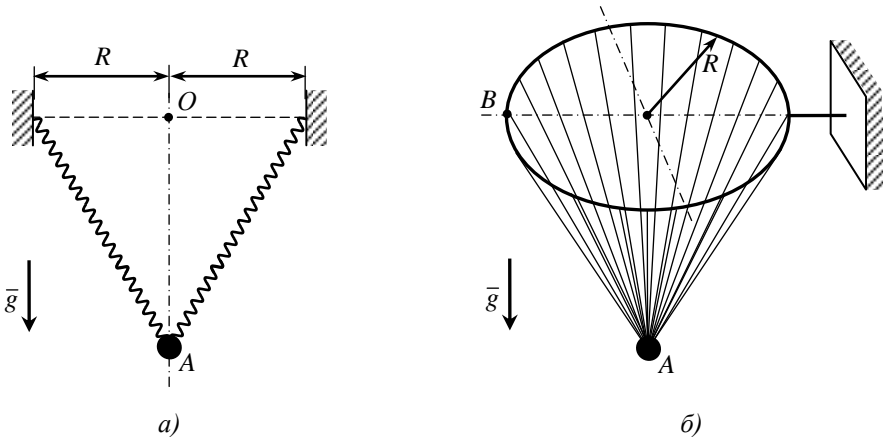


Рис. 5

**Задача Д2** (6 баллов). Тонкая лента 1, в точке  $B$  сходящая с барабана 2 радиуса  $R$ , опирается на гладкую горизонтальную поверхность 3. На ленту положили материальную точку  $M$ . Массы барабана и точки  $M$  одинаковы и равны  $m$  каждая, массой ленты пренебрегаем. Барабан считаем однородным цилиндром. Коэффициент трения между точкой  $M$  и лентой равен  $f = 2/3$ . В момент  $t = 0$  система была в покое, при этом точка  $M$  находилась на расстоянии  $AB = l = 7g/9$  (м) от точки  $B$ . К барабану приложили переменный вращающий момент  $M_{ep} = M_{ep}(t) = mgRt$ . В какой момент времени точка  $M$  окажется в положении  $B$ ? Считаем, что лента достаточно протяженная, а левый край поверхности 3 находится на пренебрежимо малом расстоянии от точки  $B$ .

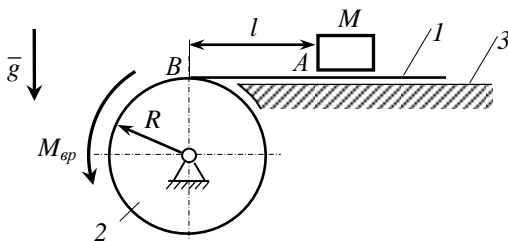


Рис. 6

**Задача ДЗ** (5 баллов). Призма опирается на гладкую горизонтальную плоскость. Материальная точка  $M$  скользит по поверхности круглого цилиндрического выреза призмы с центром закругления в точке  $O$ . Вначале система была в покое, при этом точка  $M$  была в положении  $A$ . В некоторый момент, когда скорость призмы стала равной  $v_1$ , величина скорости центра масс всей системы оказалась равной  $v_2$ . Какова при этом величина угла  $\varphi = \angle AOM$  ?

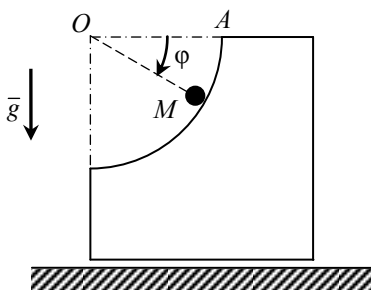


Рис. 7

**Задача Д4** (9 баллов).

1). Однородный стержень  $OA$  наклонен к горизонтالي под углом  $60^\circ$  (рис. 8а). Какую угловую скорость  $\omega$  надо ему придать, чтобы в этот момент вектор реакции шарнира  $O$  был направлен вертикально? (3 балла)

2). Однородные стержни  $OA$  и  $BC$  имеют длины  $l$  и  $2l$ , а также массы  $t$  и  $t/2$ , соответственно (рис. 8б). Расстояние от шарнира  $O$  до линии движения ползуна  $B$  равно  $l$ . Система располагается в вертикальной плоскости. Размерами и весами ползунов, а также трением пренебрегаем. В указанном на рисунке положении механизма стержню  $OA$  придали угловую скорость  $\omega_0$  против часовой стрелки. Определите угловую скорость стержня  $OA$  в момент, когда угловая скорость стержня  $BC$  окажется равной нулю. (6 баллов)

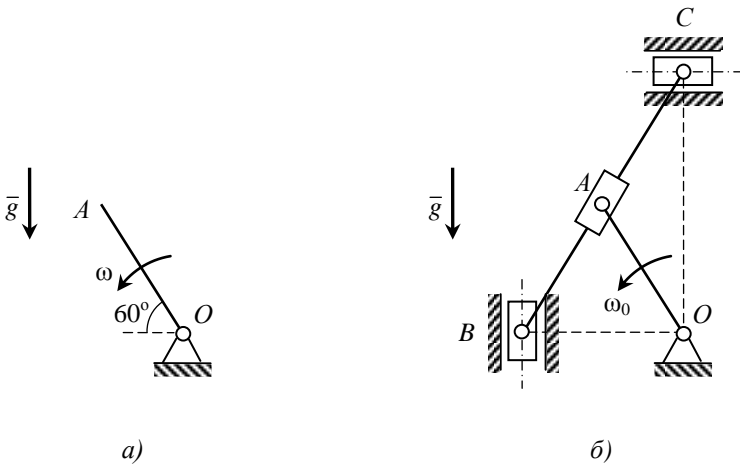


Рис. 8