Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КГЭУ, 19-23 ноября 2018 г.

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович.
Рецензент:
доцент кафедры АГМ К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович.

***Решение задачи 1*.**

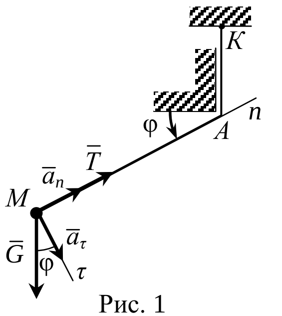

Рис. 1

1.1. Введем обозначения: φ – угол поворота участка *AM* нити, *s* – длина участка *AM*, $\overline{G}$ и $\overline{T}$ – сила тяжести и сила натяжения нити, соответственно (рис. 1). Запишем дифференциальное уравнение (ДУ) движения точки *M* при ее вращении вокруг неподвижной точки *A* в проекции на касательную ось τ, с учетом $a_\tau = s\ddot{\varphi}$:

$$ma_\tau = G\cos\varphi.$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{s}\cos\varphi. \qquad (1)$$

В данном задании в течение всего времени $s = s_0 = 2$ м.

Начальные условия для ДУ (1):

$$\varphi(0) = \alpha\,,\ \dot{\varphi}(0) = 0\,. \qquad (2)$$

Условие выхода:

$$\varphi(\tau) = \pi/2\,. \qquad (3)$$

Решаем систему (1)-(2) численно с использованием метода Эйлера или Рунге-Кутта с шагом численного метода $h \sim 10^{-6}$ с.

Примеры вычислений приведены в тексте с условиями задач в примерах для отладки.

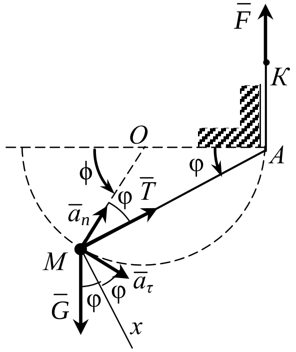

Рис. 2

1.2. Движение точки M по дуге окружности с центром O , лежащим на одной горизонтали с A, обеспечивается приложенной к точке K некоторой переменной силой $F = F(\varphi)$ (рис. 2). Угол поворота радиуса вращения OM вокруг O равен $\phi = 2\varphi$. При этом из равнобедренного треугольника OMA:

$$OM = \frac{s_0}{2\cos\alpha}.$$

Чтобы исключить неизвестную силу натяжения $T = F$ из записи уравнения движения, спроецируем ДУ движения точки M на ось x, перпендикулярную $\overline{T}$:

$$m(a_\tau \cos\varphi - a_n \sin\varphi) = G\cos\varphi.$$

С учетом $\cos\varphi \neq 0$ при $\varphi < \pi/2$ (т.е. в течение всего движения, кроме момента времени τ), можно разделить ДУ на $\cos\varphi$:

$$a_\tau - a_n \operatorname{tg}\varphi = g.$$

Учтем здесь

$$a_\tau = OM \cdot \ddot{\phi}, \; a_n = OM \cdot \dot{\phi}^2.$$

Окончательно получаем ДУ относительно угла ϕ:

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi}^2 \operatorname{tg}(\phi/2) + \frac{2g\cos\alpha}{s_0}. \qquad (4)$$

В (3) выражение $\operatorname{tg}(\phi/2)$ определено при $2\alpha \le \phi < \pi$. Поэтому в программе для численного метода выражение из правой части (4) определено вплоть до последнего шага численного метода.

Начальные условия:

$$\phi(0) = 2\alpha, \; \dot{\phi}(0) = 0.$$

Условие выхода: $\phi(\tau) = \pi$. В программе вычисления идут до тех пор, пока $\phi(\tau) < \pi$. Величина τ равна пределу времени движения M при ее стремлении к положению A. Хотя угловое ускорение $\ddot{\phi}$ при стремлении точки M к положению A стремится к бесконечности, на точность вычисления τ это почти не оказывает влияния, так как участок с такой особенностью точка преодолевает за весьма короткое время. Это подтверждается достаточно хорошей сходимостью численного метода. Ответ с точностью до 5 знаков обеспечивается при шаге по времени $h \sim 10^{-6}$.

Однако, если требуется обеспечить еще более высокую точность решения, можно использовать следующий уточняющий подход (предложен рецензентом Р.Ф. Мардановым). Приращение угла, получаемое на последнем временном отрезке, на порядки больше, чем в среднем по всему пути. Поэтому разобъем весь путь интегрирования на два участка. На первом участке численно интегрируем ДУ (4) по времени. На втором участке (начиная с некоторого промежуточного момента и до момента τ) переходим в уравнениях к независимой переменной ϕ и вводим новую функцию $\zeta = 1/\dot{\phi}$. Получаем следующую систему ДУ:

$$\frac{d\zeta}{d\phi} = -\frac{g\zeta^3}{r} + \zeta \operatorname{tg}\frac{\phi}{2}, \qquad \frac{dt}{d\phi} = \zeta,$$

где $r = s_0$ – радиус траектории, а начальные условия для системы берутся с последнего момента времени первого участка движения.

Если в рамках лишь (4) ответ с заданной точностью обеспечивается при шаге по времени $h \sim 10^{-6}$, то, например, при $h \sim 10^{-5}$ ответ уже начинает отличаться от верного в последнем знаке. А уточняющий подход обеспечивает точность всех знаков и при $h \sim 10^{-4}$ (методом Эйлера 2-го порядка). К сожалению, формулы для второго участка использовать на всем пути движения не удается, так как в начальный момент времени $\zeta = \infty$. Поэтому в рамках этого уточняющего подхода приходится вводить разбиение на два участка.

1.3. *Способ 1.* Движение точки *M* рассмотрим как сложное движение (рис. 3). Относительное движение – движение вдоль прямой *AM*, переносное движение – вращение вместе с *AM* вокруг *A*. Абсолютное ускорение точки *M*: $\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c$.

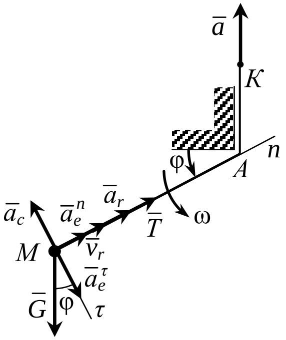

Рис. 3

При этом относительное ускорение равно $a_r = a = g$, вектор $\bar{a}_r$ направлен к точке A. Дважды интегрируя по времени при начальных условиях $s(0) = s_0 = 2$, $v_r(0) = 0$, получим относительную скорость: $v_r = v_r(t) = gt$, а также закон относительного движения: $s = s(t) = s_0 - gt^2/2$.

Переносное ускорение: $\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n$, где $a_e^\tau = s\ddot{\varphi}$, $a_e^n = s\dot{\varphi}^2$. Ускорение Кориолиса: $a_c = 2\omega_e v_r = 2\dot{\varphi}gt$.

Чтобы исключить из записи ДУ движения неизвестную силу натяжения нити T, проецируем ДУ на касательную ось τ:

$$m(a_e^\tau - a_c) = G\cos\varphi .$$

$$s\ddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}gt = g\cos\varphi .$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2gt\dot{\varphi} + g\cos\varphi}{s_0 - gt^2/2} . \qquad (5)$$

Начальные условия для ДУ (5) совпадают с (2). Условием выхода, помимо (3), могло бы быть также условие $s(\tau) = 0$ (при этом точка M также оказалась бы на вертикали AM). Однако численный эксперимент показывает, что последнее условие могло бы реализоваться ранее выполнения (3) лишь при огромных значениях a (порядка $10^4 g$ или более). При $a = g$ и любом значении α в (2) реализуется условие выхода (3).

Способ 2. Вывод (5) будет короче, если записать ДУ движения точки M в полярной системе координат с координатами $\rho = AM$ и φ. ДУ движения в проекции на подвижный орт, связанный с движущейся точкой и направленный в сторону возрастания координаты φ, имеет известный из теории вид:

$$m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = F_\varphi .$$

В нашем случае:

$$\rho = s_0 - gt^2/2, \quad \dot\rho = -gt, \quad F_\varphi = mg\cos\varphi .$$

С учетом этого выводим уравнение (5).

В дополнение к примеру для отладки: при $\alpha = \pi/6$ рад в искомый момент $\tau = 0.49637$ с получим $s = 0.79274$ м.

1.4. *Способ 1.* В отличии от предыдущего задания величина силы натяжения нити постоянна и известна: $T = F = mg$, зато относительное ускорение a_r с течением времени меняется по заранее неизвестному закону (рис. 3). При этом, с учетом предварительного выбора направлений $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$ на рисунке, будет выполняться: $v_r = -\dot{s}$, $a_r = -\ddot{s}$. Поэтому выражение для ускорения Кориолиса получает вид: $a_c = -2\dot\varphi\dot{s}$. (Как обычно в задачах такого рода, истинные направления векторов ускорений могут быть противоположными направлениям, указанным на рисунке, если их величины отрицательны, но это не влияет на получение ДУ движения в общем виде.)

Запишем ДУ движения в проекциях на оси τ и *n*:

$$\begin{cases} m(a_e^\tau - a_c) = G\cos\varphi. \\ m(a_r + a_e^n) = T - G\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} s\ddot\varphi + 2\dot\varphi\dot{s} = g\cos\varphi. \\ -\ddot{s} + s\dot\varphi^2 = g(1-\sin\varphi). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot\varphi = \dfrac{-2\dot\varphi\dot{s} + g\cos\varphi}{s}. \\ \ddot{s} = s\dot\varphi^2 - g(1-\sin\varphi). \end{cases} \qquad (7)$$

Начальные условия для системы ДУ (6):

$$\varphi(0) = \alpha, \ \dot\varphi(0) = 0, \ s(0) = s_0, \ \dot{s}(0) = 0. \qquad (8)$$

Условия выхода те же, что и в задании 1.3: достижение $\varphi(\tau) = \pi/2$ или $s(\tau) = 0$. Но, как и задании 1.3, реализуется лишь первое из этих условий.

Способ 2. Как и в задании 1.3, вывод (7) будет короче, если записать ДУ движения точки M в полярной системе координат. ДУ движения в проекциях на подвижные орты, связанные с движущейся точкой и направленные в сторону возрастания координат ρ и φ, соответственно, имеют известный из теории вид:

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=F_\rho. \\ m(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})=F_\varphi. \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\rho=s\,,\quad F_\rho=-T+G\sin\varphi=-mg(1-\sin\varphi)\,,\quad F_\varphi=mg\cos\varphi\,.$$

Отсюда сразу получаем (7) (там уравнения записаны в другой последовательности).

Заметим, что в течение некоторого промежутка времени от начала движения, в силу $T-G\sin\alpha>0$, будет $a_r>0$, т.е. $\ddot{s}<0$ и точка K поднимается. Однако по мере увеличения φ и a_e^n, как видно из 2-го уравнения в (7), величина $\ddot{s}$ станет положительной, т.е. точка K начнет опускаться.

В дополнение к примеру для отладки: при $\alpha=\pi/6$ рад до момента $t=0.50378$ с точка K поднимается, в этот момент достигается наименьшее значение $s=1.69077$ м. Затем точка K опускается и в искомый момент $\tau=0.68914$ с получим $s=1.85728$ м.

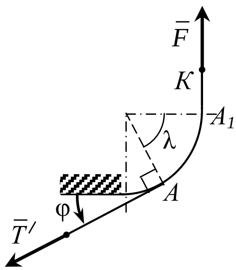

Рис. 4

1.5. Запишем соотношение между силами F и T при наличии трения на участке малого шероховатого закругления AA_1 (рис. 4). Величина дуги закругления, вдоль которой происходит контакт нити с закруглением AA_1, равна $\lambda=\pi/2-\varphi$.

Случай 1. Условие непроскальзывания нити вдоль AA_1 согласно формуле Эйлера (см., например, учебник Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 2001. §26):

$$e^{-f\lambda} \le \frac{F}{T} \le e^{f\lambda}\ . \tag{9}$$

При этом $a_r = 0$ и точка *M* вращается вокруг *A* с постоянным радиусом вращения s. ДУ этого вращения совпадает с ДУ (1).

При нарушении (9) нить проскальзывает вдоль *A* и нужно рассмотреть следующие два случая.

Случай 2. Если в какой-то момент на шаге численного метода в программе получается численно $\frac{F}{T} < e^{-f\lambda}$, то это соответствует проскальзыванию нити в направлении действия $\overline{T}^{/}$ (при этом точка *K* опускается). Тогда необходимо положить $\frac{F}{T} = e^{-f\lambda}$, то есть $T = Fe^{f\lambda} = 0.5mg\,e^{f(\pi/2-\varphi)}$. С учетом этого, система ДУ по сравнению с (6) получает несколько иной вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \dfrac{-2\dot{\varphi}\dot{s} + g\cos\varphi}{s}. \\ \ddot{s} = s\dot{\varphi}^2 - g(0.5e^{f(\pi/2-\varphi)} - \sin\varphi). \end{cases} \tag{10}$$

Случай 3. Если в какой-то момент в программе получилось бы численно

$$\frac{F}{T} > e^{f\lambda}, \tag{11}$$

то это соответствовало бы проскальзыванию нити в направлении действия $\overline{F}$ (при этом точка *K* поднималась бы). Тогда необходимо было бы положить далее $\frac{F}{T} = e^{f\lambda}$, то есть $T = Fe^{-f\lambda}$.

Докажем, что для того, чтобы случай 3 не мог реализоваться с учетом условий $\pi/6 \le \alpha < \pi/2$ и $F = mg/2$, достаточно, чтобы с течением времени выполнялось $\varphi \ge \pi/6$. Действительно, предположим противное, т.е. реализацию случая 3. Обозначим самый ранний момент такой реализации через $t_{\min}$. Заметим, что при $t = t_{\min}$ вектор $\overline{a}_r$ был бы направлен строго к точке *A*. Тогда из 2-го уравнения (6) с учетом

$a_e^n \geq 0$ получим:

$$m(a_e^n + |a_r|) = T - G\sin\varphi .$$

$$T > G\sin\varphi \geq G/2 . \qquad (12)$$

Тогда $\dfrac{F}{T} < 1 \leq e^{f(\pi/2-\alpha)}$, что противоречило бы (11). Доказательство завершено.

Условие $\varphi \geq \pi/6$ выполняется в силу того, что вектор абсолютного ускорения точки M $\bar{a}_M = (\bar{G} + \bar{T})/m$ все время направлен ниже прямой *AM,* при том, что точка *M* вначале была в покое. Поэтому траектория точки *M* не пересечет луч AM_0, где M_0 – начальное положение точки *M*. Отсюда $\varphi \geq \alpha \geq \pi/6$.

Поэтому случай 3 не реализуется.

При численном моделировании при $t = 0$ проверяем, реализуется ли случай 1. При этом, как видно из 2-го уравнения (6), полагаем $T = G\sin\alpha$ **.**

Если значение α ближе к $\pi/6$, то при $t = 0$ условие (9) выполняется и случай 1 реализуется. Далее по мере увеличения $\sin\varphi$ и a_n величина $T = G\sin\varphi + ma_n$ увеличивается, в некоторый момент (9) перестает выполняться и начинает реализовываться случай 2. Например, в примере для отладки при $\alpha = \pi/6$ рад это происходит в момент $t = 0.23734$ с. С дальнейшим увеличением $\sin\varphi$ и a_n величина *T* продолжает увеличиваться, поэтому случай 2 реализуется вплоть до момента τ. В дополнение к примеру для отладки: при $\alpha = \pi/6$ в искомый момент $\tau = 0.88631$ с будет $s = 3.18395$ м.

Если же значение α ближе к $\pi/2$, то (9) не выполняется и сразу реализуется случай 2 вплоть до момента τ. Например, такая ситуация возникает в другом примере для отладки при $\alpha = \pi/3$. При этом в искомый момент $\tau = 0.93335$ с будет $s = 3.62578$ м.

Решение задачи 2.

Для произвольного положения стержня во время движения:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2 .$$

$$(x_B - x_A)^2 + \left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right)^2 = l^2 . \qquad (1)$$

Для начального положения с учетом $x_{A,0} = y_{A,0} = 1$ м:

$$(x_{B,0} - 1)^2 + \left(\frac{1}{x_{B,0}} - 1\right)^2 = l^2 . \qquad (2)$$

Выражение в левой части (2) будет тем меньше, чем меньше будет l, и, судя по графику функции $y = 1/x$, чем больше будет $x_{B,0}$, $x_{B,0} \in (0;1)$. Поэтому при фиксированном l функция

$$F(x_{B,0}) = (x_{B,0} - 1)^2 + \left(\frac{1}{x_{B,0}} - 1\right)^2 - l^2$$

монотонно убывает на интервале $x_{B,0} \in (0;1)$. Решая нелинейное уравнение $F(x_{B,0}) = 0$ численно, например, методом половинного деления, находим $x_{B,0}$. Далее получаем $y_{B,0} = \dfrac{1}{x_{B,0}}$.

Определить $\upsilon_{B,0}$ можно различными способами.

Способ 1. Дифференцируем (1) по времени для произвольного положения стержня во время движения:

$$2(x_B - x_A)(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + 2\left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right) \cdot \left(-\frac{\dot{x}_B}{x_B^2} + \frac{\dot{x}_A}{x_A^2}\right) = 0 . \qquad (3)$$

Из (3) выражаем $\dot{x}_B$:

$$\dot{x}_B = \frac{x_B^2 (x_A^3 x_B + 1)}{x_A^2 (x_A x_B^3 + 1)} \cdot \dot{x}_A . \qquad (4)$$

Для начального положения учитываем:

$$x_{A,0} = y_{A,0} = 1 \text{ м},$$

$$\dot{x}_{A,0} = v_{A,0} \cos 45^o = 5/\sqrt{2} \text{ м/с}.$$

Тогда после упрощений получим из (4):

$$\dot{x}_{B,0} = \frac{x_B^2}{x_B^2 - x_B + 1} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Далее находим $\dot{y}_B$, продифференцировав соотношение $y_B = \dfrac{1}{x_B}$:

$$\dot{y}_B = -\frac{\dot{x}_B}{x_B^2}. \tag{6}$$

С учетом (5) и ранее численно найденного $x_{B,0}$ из (6):

$$\dot{y}_{B,0} = -\frac{\dot{x}_{B,0}}{x_{B,0}^2}. \tag{7}$$

Окончательно, с учетом (5) и (7):

$$v_{B,0} = \sqrt{(\dot{x}_{B,0})^2 + (\dot{y}_{B,0})^2}. \tag{8}$$

Например, при $l = 2$ м получим $\dot{x}_{B,0} = 0.5471$ м/с, $\dot{y}_{B,0} = -4.5696$ м/с, $v_{B,0} = 4.6022$ м/с.

Способ 2. Более экономичный в плане расхода времени на вычисления и программирование способ состоит в численной оценке $v_{Bx,0}$, $v_{By,0}$:

$$v_{Bx,0} = \left(\frac{dx_B}{dt}\right)_0 \approx \frac{x'_{B,0} - x_{B,0}}{h}, \; v_{By,0} \approx \frac{y'_{B,0} - y_{B,0}}{h}, \tag{9}$$

где $x'_{B,0}$, $y'_{B,0}$ – координаты точки B по прошествии малого промежутка времени $dt = h$ после начала движения. Для их определения вначале вычисляем координату точки A в этот момент (используя формулу, аналогичную (9)):

$$x'_{A,0} \approx x_{A,0} + v_{Ax,0} \cdot h.$$

Затем решаем численно нелинейное уравнение вида (1), где $x_A = x'_{A,0}$, полностью аналогично тому, как это делалось при определении $x_{B,0}$.

Получаем $x'_{B,0}$, а затем $y_{B,0} = \dfrac{1}{x_{B,0}}$. Далее используем (9) и затем по (8) находим $v_{B,0}$. Численный эксперимент показывает, что в рамках данного способа ответ получается с необходимой точностью.

Для определения ω_0 запишем для стержня AB теорему о сложении скоростей при плоскопараллельном движении твердого тела:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}.$$

$$\bar{v}_{B/A} = \bar{v}_B - \bar{v}_A.$$

$$\omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{\sqrt{(v_{Bx} - v_{Ax})^2 + (v_{By} - v_{Ay})^2}}{l}. \qquad (10)$$

Учитываем в (10) ранее найденные значения проекций скоростей для начального положения и получаем ω_0.

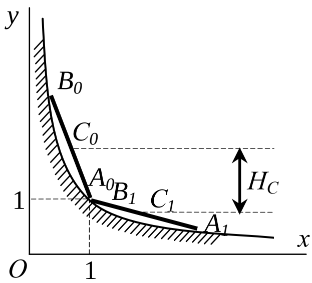

Рис. 5

Определим ω_1. Обозначим начальное и конечное положения стержня через A_0B_0 и A_1B_1, соответственно (рис. 5). При этом точки A_1 и B_0 совпадают и лежат на прямой $y = x$. Поверхность, заданная уравнением $xy = 1$, симметрична относительно прямой $y = x$. Поэтому A_0B_0 и A_1B_1 симметричны относительно $y = x$. Мгновенные центры скоростей (МЦС) P_0 и P_1 для этих положений, находящиеся на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей концов стержня, т.е. на пересечении перпендикуляров к касательным к поверхности, также симметричны относительно $y = x$. Причем, так как перпендикуляры к векторам $\bar{v}_{A,0}$, $\bar{v}_{B,1}$ совпадают с прямой $y = x$, то положения P_0 и P_1 совпадают. Поэтому моменты инерции относительно осей, проходящих через соответствующие МЦС, для положений A_0B_0 и A_1B_1 одинаковы: $J_{P_0z_0} = J_{P_1z_1}$.

Отношение кинетических энергий стержня в конечном и начальном положениях:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{J_{P_1 z_1}\omega_1^2 / 2}{J_{P_0 z_0}\omega_0^2 / 2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} \cdot \omega_0. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$T_0 = \frac{M v_{C,0}^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega_0^2}{2}, \tag{12}$$

где момент инерции относительно центра масс стержня $J_{Cz} = \frac{Ml^2}{12}$.

Так как $\bar{r}_C = (\bar{r}_A + \bar{r}_B)/2$, то $\bar{v}_C = (\bar{v}_A + \bar{v}_B)/2$ и в (12):

$$v_{C,0}^2 = v_{Cx,0}^2 + v_{Cy,0}^2 = ((v_{Ax,0} + v_{Bx,0})/2)^2 + ((v_{Ay,0} + v_{By,0})/2)^2. \tag{13}$$

Работа силы тяжести:

$$A_G = MgH_C. \tag{14}$$

Так как $y_{A,0} = y_{B,1} = 1$ и, в силу вышеописанной симметрии, $y_{A,1} = x_{B,0}$, то

$$H_C = y_{C,0} - y_{C,1} = \frac{y_{B,0} + y_{A,0}}{2} - \frac{y_{B,1} + y_{A,1}}{2} = \frac{y_{B,0} - x_{B,0}}{2}. \tag{15}$$

По теореме об изменении кинетической энергии для стержня *AB*:

$$T_1 - T_0 = A_G.$$

$$T_1 = T_0 + A_G, \tag{16}$$

где T_0 вычисляем по (12) с учетом (13) и ранее найденных численных значений скоростей для начального положения, а A_G вычисляем по (14) с учетом (15) и ранее найденных численных значений координат для начального положения.

Окончательно, с учетом (16) искомое ω_1 определяем по (11). Отметим, что везде в ходе этих вычислений в программе можно полагать $M = 1$, так как в числителе и знаменателе (11) масса сокращается.

Возможен также способ определения ω_1 без привлечения вышеописанного учета симметрии относительно $y = x$ и соотношения (11). Для этого вначале по (16) вычисляем T_1. Затем исходим из формулы

$$T_1 = \frac{Mv_{C,1}^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega_1^2}{2}. \tag{17}$$

В рамках метода половинного деления варьируем, например, $v_{A,1}$, вычисляя затем $v_{B,1}$ и далее $v_{C,1}$, а также ω_1 (аналогично тому, как это делалось выше для начального положения). Определяем значение выражения в правой части (17) и сравниваем результат с действительным значением T_1 в левой части (17). Использование метода половинного деления позволяет получить значения скоростей, а, значит, и искомого ω_1, при которых (17) выполняется.

Отметим, что хотя этот способ и несколько более трудоемок при реализации в программе, зато применим для произвольного конечного положения *AB*, а не только для рассмотренного в условии «удобного» конечного положения.