# ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПЕРЫЕ ШАГИ В ЭНЕРГЕТИКЕ» ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

Методическое пособие для школьников по подготовке к Олимпиаде «Первые шаги в энергетике»

**С.А. Лившиц**

Пособие содержит материал, который может дать ориентиры для потенциальных участников Олимпиады школьников «Первые шаги в энергетике» по предмету информатика. На примерах продемонстрированы некоторые принципы, которыми полезно руководствоваться при решении олимпиадных задач.

Подготовлено в методической комиссии Олимпиады школьников «Первые шаги в энергетике» по предмету математика.

Решение олимпиадных задач служит хорошей подготовкой к будущей научной деятельности, заостряет интеллект. Эти задачи, интересные и сами по себе, служат материалом для описания ряда общематематических идей решения задач. Для решения большинства олимпиадных задач достаточно смекалки, логики и пространственного воображения. Часть задач требуют некоторого опыта, интуиции и наблюдательности. Чтобы решить наиболее трудные задачи требуется умение организовать работу над задачей (прояснить ситуацию, выявить круг идей, подобрать удобный «язык») и владеть определённой техникой.

**Рассмотрим некоторые темы, часто применяемые при решении олимпиадных задач**

## **Четность.**

Идея *четности* имеет много разных применений. Самые простые из них:

1. Если в некоторой *замкнутой* цепочке чередуются объекты двух видов, то их *четное* число (и каждого вида поровну).

2. Если в некоторой цепочке чередуются объекты двух видов, а начало и конец цепочки *разных видов*, то в ней *четное* число объектов, если начало и конец *одного* вида, то *нечетное*число. (четное число объектов соответствует *нечетному числу переходов* между ними и наоборот **!!!**)

3. По четности длины чередующийся цепочке можно узнать, одного или разных видов ее начало и конец.

4. Если предметы *можно разбить на пары*, то их количество *четно.*

**Задача 1.** На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных по цепочке (первая со второй, вторая с третьей ... 11-я с первой). Могут ли они вращаться одновременно?
**Решение:** Нет, не могут. Если бы они могли вращаться, то в замкнутой цепочке чередовалось бы два вида шестеренок: вращающиеся по часовой стрелке и против часовой стрелки (для решения задачи не имеет никакого значения, в *каком именно* направлении вращается первая шестеренка **!**) Тогда (по п.1) всего должно быть четное число шестеренок, а их 11 штук. ч.т.д.

**Задача 2.** Шахматный конь вышел с некоторой клетки, сделал несколько ходов и вернулся на клетку того же цвета, с которой он начинал. Доказать, что он сделал четное число ходов.
**Решение:** Шахматный конь каждым ходом *меняет цвет* клетки, на которой он стоит. Получаем, что в замкнутой цепочке клеток, по которым прошел конь, чередуются черные и белые. Значит, всего в цепочке *четное* число *ходов*.

**Задача 3.** Дан осесимметричный выпуклый 101-угольник. Докажите, что ось симметрии проходит через одну из его вершин.
**Решение:** Для каждой вершины существует симметричная ей относительно

оси, причем если вершина А симметрична вершине В, то вершина В симметрична вершине А. Тогда мы можем разбить вершины на *пары симметричных*. Поскольку вершин нечетное число (101), то, по п.5, есть вершина, которая будет *парой к самой себе*, т.е. она симметрична самой себе. Эта вершина и будет лежать на оси симметрии.

Иногда полезно бывает рассмотрение *четности суммы или разности* нескольких целых чисел:

1. Сумма двух четных чисел четна. Сумма двух нечетных чисел *четна*. Сумма четного и нечетного чисел - *нечетна*.
2. Сумма *любого количества* четных чисел четна. Это очевидно по многим разным соображениям. Например: при последовательном вычислении суммы всегда все промежуточные результаты будут четными, согласно свойству 0. Либо: все четные числа делятся на 2, поэтому из их суммы можно вынести 2 за скобку; а тогда сумма будет делится на 2, т.е. будет четной.
3. Сумма *четного* числа *нечетных чисел* четна, сумма *нечетного* числа *нечетных чисел* нечетна.
4. Разность двух четных чисел четна. Разность двух нечетных чисел *четна*. Разность четного и нечетного чисел в любом порядке - *нечетна*.
5. Разность двух чисел имеет *ту же* четность, что и их *сумма*.

Примеры:

**Задача 4.** В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки + и -, чтобы получилось выражение, равное нулю? **Решение:** Нет, нельзя. По п.6 или 7', четность полученного выражения *всегда* будет совпадать с четностью *суммы* 1+2+...+10=55, т.е. сумма *всегда будет нечетной*. А 0 - четное число. ч.т.д.

**Задача 5.** При каких n сумма чисел от 1 до n нечетна?
**Решение:** Сумма чисел от 1 до n нечетна тогда и только тогда, когда среди них нечетное число нечетных. Кол-во нечетных чисел от 1 до n - это n/2 при четном n и (n+1)/2 при нечетном. Нечетное n/2 при четном n означает n=4k+2 (остаток 2 от деления на 4), а несчетное (n+1)/2 при нечетном n означает n=4k+1 (остаток 1 от деления на 4). **Ответ:** n=4k+1 или 4k+2.

**Принцип Дирихле.**
Формулировка: Если в n "клетках" сидят не менее n+1 "кроликов", то в какой-то из "клеток" сидят не менее 2-х "кроликов". (Термины "кролики" и "клетки" являются общепринятыми в математике )

1. Если в n клетках сидят не более n-1 кроликов, то есть пустая клетка.
2. Если в n клетках сидят ровно n кроликов, то либо в каждой клетке сидит ровно один кролик, либо есть *и пустая клетка, и клетка, в которой не менее 2-х* кроликов.

3. Если в n клетках сидят *не менее n*(k-1)+1* кроликов, то в какой-то из клеток сидят *не менее k* кроликов.

4. Если в n клетках сидят *не более n*(k+1)-1* кроликов, то в какой-то из клеток сидят *не более k* кроликов.

5. Если сумма n чисел равна S, то среди них есть число, *не меньшее S/n*, и число, *не большее S/n*.

**<u>Задача 6.</u>** В мешке лежат шарики 2-х разных цветов (много белых и много черных). Какое наименьшее количество шариков надо на ощупь вынуть из мешка, чтобы среди них заведомо оказались два одного цвета.

**<u>Решение:</u>** 3 шарика. Это - просто применение принципа Дирихле: кроликами будут взятые шарики, а клетками - черный и белый цвета. Клеток две, поэтому если кроликов хотя бы три, то какие-то два попадут в одну клетку (будет 2 одноцветных шарика). С другой стороны, взять два шарика мало, потому что они могут быть двух разных цветов.

**<u>Задача 7.</u>** Дано 233 целых числа. Доказать, что разность каких-то двух из них делится на 232.

**<u>Решение:</u>** У нас есть 233 числа, которые мы, скорее всего, сделаем кроликами. Найдем подходящие клетки: их должно быть не более 232, и разность 2-х чисел, "сидящих в одной клетке" должна делится на 232. **Остатки от деления на 232** как раз подходят. Применяем принцип Дирихле для 233 кроликов-чисел и 232 клеток-остатков и получаем требуемое.

**<u>Задача 8.</u>** На олимпиаде 10 школьников решили в сумме 35 задач, причем среди них были решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи. Доказать, что кто-то из них решил не менее 5 задач.

**<u>Решение:</u>** Возьмем одного школьника, решившего ровно одну задачу, одного, решившего ровно две и одного, решившего ровно три. Эти трое решили в сумме 6 задач. Остается еще 7 школьников, решивших в сумме 29 задач. Если взять *задачи* в качестве *кроликов* и *школьников* в качестве *клеток*, то получается в точности утверждение п.3 при n=7, k=5 ч.т.д.

**<u>Задача 9.</u>** Докажите, что равностронний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

**<u>Решение:</u>** Главное соображение: меньший равносторонний треугольник, как его не клади, не сможет покрыть 2 вершины большего. Поэтому, взяв вершины в качестве клеток и маленькие треугольники в качестве кроликов, мы получим, что кроликов меньше, чем клеток, откуда следует, что есть пустая клетка. Это означает, что какую-то из вершин большого треугольника мы никогда не накроем, поэтому и не накроем его целиком ч.т.д.

**<u>Задача 10.</u>** На планете в звездой системе Тау Кита суша занимает больше половины площади. Доказать, что таукитяне смогут прорыть прямой туннель через центр планеты так, чтобы он соединял сушу с сушей..

**<u>Решение:</u>** Возьмем на планете множество точек суши и множество точек, диаметрально противоположных суше. Сумма площадей этих множеств - удвоенная площадь суши, что *строго больше площади планеты*. Тогда эти 2 множества перекроются. В точке перекрытия и можно будет начать рыть туннель.

## <u>Комбинаторика.</u>

Комбинаторика - это математическая наука о подсчете числа способов сделать что-либо. В олимпиадных задачах комбинаторика используется **настолько часто**, что ее знание необходимо каждому математику-олимпиаднику.

Основные комбинаторные формулы и соображения:

. *Функция $f(n)$, для которой $f(0)=1$, $f(n+1)=(n+1)f(n)$ при всех целых неотрицательных $n$, называется $n$-<u>факториалом</u>. (обозначается $n!$)*

Для любого натурального $n$ имеем:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

По общей договоренности $0! = 1$

Пусть дано множество, состоящее из $n$ различных элементов.

*<u>Сочетанием</u> из $n$ элементов по $m$ элементов ($0 < m \le n$) называется любое подмножество, которое содержит $m$ элементов данного множества.*

Сочетания – это комбинации, каждая из которых состоит из $m$ элементов, взятых из данных $n$ элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, то есть отличаются составом элементов.

Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ элементов обозначается символом $C_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Имеют место формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \ (m \le n),$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}, \ (1 < m < n).$$

*<u>Размещением</u> из $n$ элементов по $m$ элементов ($0 < m \le n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее $m$ элементов.*

Размещение – это комбинации, состоящие из $m$ элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из $n$ элементов по $m$ обозначается символом $A_n^m$ и может быть вычислено по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... (n-m+1)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

*<u>Перестановкой</u> из $n$ элементов называется размещение из $n$ элементов по $n$ элементов.*

Из определения вытекает, что перестановки – это комбинации, состоящие из $n$ элементов и отличающихся друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок вычисляется по формуле:

$P_n = n!$

**<u>Задача 11.</u>** Из города А в город Б ведет 6 дорог, из города Б в город В - 4 дороги, и больше никаких дорог из этих городов не выходит. Сколькими путями можно проехать из города А в город В?

**<u>Решение:</u>** На первом этапе нам надо выбрать дорогу, по которой мы поедем из А в Б, и здесь у нас есть 6 вариантов. На втором этапе надо выбрать дорогу, по которой мы поедем из Б в В, и там у нас 4 варианта. Эти два этапа полностью определяют путь проезда. Выбор независим, т.к. по какой бы дороге мы не поехали в Б, мы сможем потом поехать в В по любой из дорог. Таким образом, мы имеем дело с независимыми этапами выбора, и должны *перемножать* варианты. Всего получаем 6*4=24 различных пути.

**<u>Задача 12.</u>** Из глухого захолустного города Г, где отродясь не было никаких дорог, проложили 2 новые дороги в город В из предыдущей задачи. Кроме того, из города А из предыдущей задачи в город Г проложили еще 2 новые дороги. Сколькими путями теперь можно проехать из города А в город В?

**<u>Решение:</u>** В этой задаче надо в самом начале выделить два взаимоисключающих случая: когда мы едем через город Б, и когда едем через город Г. Найти количество путей в первом случае - это *в точности предыдущая задача* и ответ будет 6*4=24. Найти количество путей во втором случае - это задача, аналогичная предыдущей задаче, но с ответом 2*2=4. Эти количества путей надо сложить, и в ответе получается 24+4=28 путей проезда.

**<u>Задача 13.</u>** Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

**<u>Решение:</u>** Разбирать случаи, сколько четных цифр и на каких местах стоит в нашем числе - слишком долго и противно. Воспользуемся хитрым приемом: *посчитать то, что нам не нужно*. То есть, считать будем числа из одних нечетных цифр. Нечетные цифры - это "алфавит" из 5 "букв", а 6-значное число - "слово" из 6 "букв" этого "алфавита". Таких слов-чисел, согласно п.3, будет ровно $5^6$ штук. А чисел, которые нас интересуют (это все остальные) - ровно 900000-$5^6$=900000-15625=984375 (всего 6-значных чисел 900000).

**Задача 14.** Сколькими способами можно выставить по кругу красный, коричневый, зеленый, голубой и звездно-полосатый флаги? (расстановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми)

**Решение:** Перестановки n различных предметов в ряду мы умеем считать. Теперь осталось немного подумать и свести перестановки по кругу к перестановкам в ряд. Возьмем еще 5 флагов тех же цветов и будем выставлять в ряд: первый в ряду всегда будет звездно-полосатый, а следующие 4 идут в том же порядке, в каком 4 флага в круге следуют по часовой стрелке после звездно-полосатого. Например, расстановке (Кр)-(Зел)-(Гол)-(Зв-Пол)-(Кор)-(Кр) [изображен порядок флагов по кругу по часовой стрелке] будет соответствовать ряд (Зв-Пол)-(Кор)-(Кр)-(Зел)-(Гол). Понятно, что любой расстановке по кругу соответствует какой-то ряд, и любому ряду, начинающемуся со звездно-полосатого флага, соответствует какая-то расстановка по кругу (просто надо поставить звездно-полосатый флаг и вслед за ним по кругу, по часовой стрелке, выставить остальные 4 флага в том же порядке, в каком они были в ряду). Значит, расстановок флагов по кругу ровно столько же, сколько расстановок в ряд, начинающихся со звездно-полосатого флага. Этих расстановок будет ровно 4!=24, так как реально мы расставляем только 4 флага (а звездно-полосатый всегда торчит на первом месте). Ответ: 24 способа.

**Задача15.** Один профессор математики написал 6 книг, другой - 8. Каждый из хочет подарить другому 3 свои книги с автографом. Сколькими способами они могут обменяться подарками?

**Решение:** Первый профессор может выбрать для подарка 3 книги из своих 6, а это можно сделать $C_6^3$=20 способами. Второй профессор может выбрать для подарка 3 книги из своих 8, уже $C_8^3$=56 способами. Оба выбора происходят независимо и однозначно определяют способ обмена, поэтому варианты нужно перемножать. Ответ: $C_6^3*C_8^3$=56*20=1120 способов.

**Теория чисел.**

Простые и составные числа. Основная теорема арифметики:

Из школьной программы нам известны следующие факты:

- натуральное число называется *простым*, если оно делится только на самого себя и на 1;
- натуральное число называется *составным*, если оно имеет делитель, отличный от самого себя и 1;
- 1 не считается *ни простым, ни составным* числом (это связано с тем, что 1 является так называемым *обратимым элементом* множества целых чисел, т.е. любое число можно поделить на 1, а простые числа этим свойством не обладают);

- любое натуральное число, *отличное от 1*, можно разложить в произведение *простых сомножителей*, причем *единственным образом* (с точностью до перестановки сомножителей) - этот факт называется **основной теоремой арифметики**.

Вместе с этим следует помнить:

- для любого простого числа (p) и любого натурального числа (n) существует целая неотрицательная *степень вхождения* p в разложение n, и она определена *однозначно*; если в разложении n нет множителя p, то степень равна 0, если есть - степень вхождения равна *количеству* простых множителей, равных p, в разложении n
- 2 натуральных числа a и b равны тогда и только тогда, когда степени вождения в них всех простых множителей одинаковы;
- если натуральное число n=a*b, то степень вхождения любого простого множителя в число n равна сумме его степеней вхождения в a и b;
- число n делится на число d тогда и только тогда когда любой простой множитель входит в n в не меньшей степени, чем в d,;

Очевидного способа определить по виду числа его простоту (если для него не выполняется ни один из признаков делимости на маленькие числа) *не существует*(!).

**<u>Задача 16.</u>** 8a=13b. Докажите, что a+b-составное число (a и b - натуральные).

**<u>Решение:</u>** Заметим, что числа 8 и 13 взаимно просты. Тогда, поскольку 13|8a, то 13|a. Аналогично, поскольку 8|13b, то 8|b. Тогда существуют k и l - частные от этих делений такие, что a=13k, b=8l. Перепишем равенство в виде 8*13k=13*8l, т.е. 104k=104l. Отсюда k=l и b=8k. А тогда a+b=13k+8k=21k. Поскольку 21 - составное число, то 21k составное при любом натуральном k ч.т.д.

**<u>Задача 17.</u>** Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

**<u>Решение:</u>** Среди трех последовательных чисел есть хотя бы одно четное (если наименьшее - нечетное, то четным обязательно будет среднее), поэтому их произведение делится на 2. Кроме того, среди этих чисел обязательно есть хотя бы одно, делящееся на 3 (обозначим наименьшее число за n; если n на 3 не делится, то оно либо дает при делении на 3 остаток 1, и n+2 - наибольшее число - делится на 3, либо остаток 2, и n+1 - среднее число - делится на 3), поэтому их произведение делится на 3. Поскольку *2 и 3 взаимно просты*, то произведение 3-х последовательных чисел делится на 2*3=6.

<u>Определение:</u> Назовем 2 целых числа a и b *сравнимыми по модулю* n, если их разность делится на n, или, *что то же самое*, остатки от деления этих чисел на n одинаковы. (Мы будем записывать это как a=b (mod n), хотя чаще ставится знак тождественного равенства).

Утверждение "n дает остаток r от деления на d" кратко записывается как n=r (mod d).
1. Сумма двух любых целых чисел и сумма чисел, сравнимых с ними по модулю n, сравнимы по модулю n.
2. Разность двух любых целых чисел и разность чисел, сравнимых с ними по модулю n, сравнимы по модулю n.
3. Произведение двух любых целых чисел и произведение чисел, сравнимых с ними по модулю n, сравнимы по модулю n.

**Задача 18.** Доказать, что $n^3+2n$ делится на 3 при любом натуральном n.
**Решение:** Переберем все возможные остатки n от деления на 3 (перебор всех остатков действительно является полным решением!). Если n=0 (mod 3), т.е. n делится на 3, то $n^3$ и 2n делятся на 3, откуда $n^3+2n$ делится на 3. Если n=1 (mod 3), то $n^3+2n=1^3+2*1=1+2=3=0$ (mod 3), т.е. делится на 3. Если же n=2 (mod 3), то $n^3+2n=2^3+2*2=8+4=12=0$ (mod 3) - тоже делится на 3. Значит, при любом n (поскольку любое n дает от деления на 3 остаток 0, 1 или 2) $n^3+2n$ делится на 3 ч.т.д.

**Задача 19.** Решить в целых числах: $X^3-Y^3=17$.
**Решение:** Воспользуемся тождеством: $X^3-Y^3=(X-Y)(X^2+XY+Y^2)$. Оба множителя в правой части - целые при целых X и Y, а их произведение равно 17, поэтому они будут делителями числа 17. Поскольку это число простое, то нам надо рассмотреть только 4 случая:
1.) X-Y=1, $X^2+XY+Y^2=17$. Подставим во второе уравнение Y+1 вместо X: $(Y+1)^2+(Y+1)Y+Y^2=17$, то есть $3Y^2+3Y+1=17$ или $3(Y^2+Y)=16$. Но 16 не делится на 3, откуда следует отсутствие целых решений в этом случае.
2.) X-Y=17, $X^2+XY+Y^2=1$. Подставим во второе уравнение Y+17 вместо X: $(Y+17)^2+(Y+17)Y+Y^2=1$, то есть $3Y^2+3*17Y+289=1$, или $3(Y^2+17Y)+288=0$. Сократив на 3, получим $Y^2+17Y+96=0$ - квадратное уравнение с дискриминантом $17^2-4*96=289-384<0$. Решений у этого уравнения нет вообще, даже нецелых.
3.) X-Y=-1, $X^2+XY+Y^2=-17$.
4.) X-Y=-17, $X^2+XY+Y^2=-1$. Случаи *отрицательных* делителей тоже всегда надо рассматривать. В данном случае (даже в двух) нам просто повезло: выражение $X^2+XY+Y^2$ вообще *не может* быть отрицательным, откуда следует отсутствие решений. Действительно, если XY>=0, то $X^2+XY+Y^2>=X^2+Y^2>=0$, а если XY<=0, то $X^2+XY+Y^2>=X^2+2XY+Y^2=(X+Y)^2>=0$ ч.т.д.

**Задача 20.** Доказать, что если P и $P^2+2$ - простые числа, то $P^3+2$ - тоже простое число.
**Решение:** Нетрудно убедиться, что P=2 не подходит ($P^2+2$ не простое), а P=3 подходит (и условие, и то, что надо доказать). Более того, никаких других подходящих P в первой десятке нет. На самом деле (как обычно и бывает в олимпиадных задачах) подходящих P>3 *нет вообще*. Действительно, если

$P>3$, то $P$ не делится на 3. Тогда $P=1 \pmod 3$ или $P=2 \pmod 3$. В любом случае, $P^2=1 \pmod 3$ и $P^2+2=0 \pmod 3$, т.е. делится на 3. Но тогда оно не может быть простым, так как оно явно больше трех! Утверждение доказано.

**<u>Задача 21.</u>** $A+B+C$ делится на 6. Доказать, что $A^3+B^3+C^3$ делится на 6.
**<u>Решение:</u>** Рассмотрим, какие остатки могут давать точные кубы по модулю 6. Рассматривая всевозможные остатки, получаем, что каждое число сравнимо с собственным кубом по модулю 6 (легче проверить отдельно, что $N$ сравнимо с $N^3$ по модулю 2 и по модулю 3). Тогда сумма трех чисел сравнима по модулю 6 с суммой их кубов. Первая сумма делится на 6, тогда и вторая делится на 6, ч.т.д.

## <u>Графы.</u>

Графом в математике называется картинка из точечек, соединенных палочками (более строгое определение существует, но на практике никогда не требуется). Эти точечки называются *вершинами* графа, а палочки (они могут быть и кривыми; некоторые графы вообще невозможно нарисовать так, чтобы все палочки были прямыми) - *ребрами* графа. Две вершины, соединенные ребром, называются *соседними*. Последовательность ребер, соединяющих две вершины, называется *путем*.

<u>Степени вершин, число ребер и четность.</u>

*Степенью вершины* в графе называется число выходящих из нее ребер. В ориентированном графе у каждой вершины есть *2 степени*: входящая (число ребер, входящих в вершину) и исходящая (число ребер, выходящих из вершины). Мы говорим, что вершина графа *четная*, если ее степень четна, и что вершина *нечетная* - в противном случае (в графе на рис. наверху все вершины четные). Для ориентированного графа понятие четности вершины обычно не вводится.

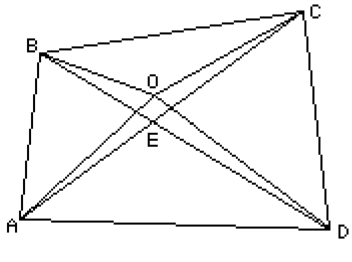
В графе степени вершин и количество ребер связаны важными соотношениями:

**<u>Задача 21.</u>** В государстве 100 городов, из каждого выходит 2 дороги, кроме столицы, откуда выходит 5 дорог и города Горный, откуда выходит одна единственная дорога. Сколько всего дорог в государстве?
**<u>Решение:</u>** Сложим количества дорог, выходящих из всех городов: $98*2+5+1=202$. Это число - количество концов всех дорог. Поскольку каждая дорога имеет 2 конца, то количество дорог будет вдвое меньше, а именно 101.

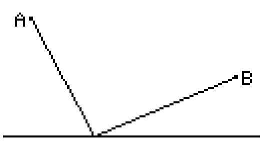
**<u>Задача 22.</u>** На остров Коневец завезли 13 телефонов. Настоятель хочет организовать такую схему телефонной связи, чтобы соединить каждый телефон ровно с 7-ю другими. Удастся ли ему это?
**<u>Решение:</u>** Посчитаем, сколько проводов нужно, чтобы осуществить такую схему. Концов проводов будет $13*7=91$, а самих проводов - вдвое меньше, то есть... 45,5 штук. Это означает, что такая схема связи невозможна.

**<u>Геометрия.</u>**
Длина любой стороны треугольника *меньше суммы* длин двух других сторон. (таким образом, для одного и того же треугольника. **1.** Длина любой стороны треугольника *больше разности* длин двух других сторон. **2.** Длина любой стороны треугольника *меньше* его *полупериметра*. **3.** Кратчайший путь между двумя точками - это отрезок прямой.
4. Внутри любого треугольника есть такая точка сумма расстояний от нее до вершин минимальна - она называется точкой Торричелли. Оказывается, из точки Торричелли все стороны видны под углом 120 градусов.

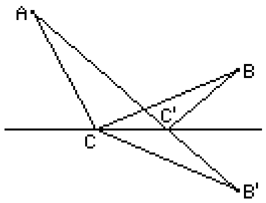
**<u>Задача 23.</u>** Найти точку внутри выпуклого четырехугольника с минимальной суммой расстояний до вершин.
**<u>Решение:</u>** Пусть ABCD - четырехугольник, O - какая-то (произвольная) точка внутри (см. рис. внизу). Тогда искомая точка - та, где достигается минимум величины AO+BO+CO+DO. Теперь мы хотим *оценить* эту сумму *снизу* (т.е. найти какую-то заведомо не большую) по неравенству треугольника, причем желательно так, чтобы эта оценка обращалась в равенство в какой-то известной точке. Выражения вида AO+BO>=AB - явно не то, что нужно, т.к. из них обращается в равенство не более двух сразу. Попробуем сложить их по-другому: AO+CO>=AC, BO+DO>=BD. Первое неравенство обращается в равенство, если O лежит на диагонали AC, второе - если O на диагонали BD. Т.о., AO+BO+CO+DO>=AC+BD - и равенство достигается, если O - точка пересечения диагоналей (E на рис. внизу). <u>Ответ:</u> Искомая точка - это точка пересечения диагоналей.




**<u>Задача 24.</u>** Диверсант выходит из леса в заданной точке (A). Он должен дойти до железной дороги (прямолинейной), заложить там мину и вернуться в лес в другой заданной точке (B), по туже сторону от ж/д (см. рис.). Как ему сделать это, пройдя по кратчайшему пути?




**<u>Решение:</u>** Нам надо искать кратчайший путь из точки A в точку B, пересекающий данную прямую. Если бы эти точки лежали по одну сторону от прямой (а не так, как на самом деле), мы бы просто соединили их отрезком! Но "если нельзя, но очень хочется, то можно": давайте отразим точку B относительно прямой в точку B' (см. рис. внизу). От A до B' провести путь по прямой уже можно. Теперь как преобразовать путь от A до B в путь от A до B' той же длины? Да очень просто - отразить относительно прямой часть пути после пересечения с ней (точки C или C' на рис.) - ведь симметрия не меняет расстояний. Тогда путь ACB перейдет в путь ACB' той же длины, а путь AC'B - в AC'B' (здесь соответствие путей - взаимно-однозначное!). Путь A'C'B', идущий по прямой, короче любого другого. Значит, исходно кратчайшим был соответствующий ему путь AC'B.




## Игры.

**Задача 25.** Двое по очереди ломают шоколадку 5x8. За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Каким выгодно начинать?

**Решение:** Что значит, что игра закончилась? Конечно, что шоколадка уже вся разломана на отдельные дольки. Долек *всегда* будет 5x8=40 штук, а шоколадка в начале была одна. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, т.е. *количество различных кусков* шоколадки увеличивается на 1. В начале это кол-во было равно 1, а в конце, как мы заметили, 40. Значит, игра продолжалась *ровно 39* ходов ("ходом" мы называем ход *одного* игрока, а не пару "ход - ответный ход"). Поэтому последний (39-й) ход был обязательно ходом первого (его ходы - первый, третий и все с нечетными номерами) - и первый выиграл.

**Задача 26.** "Хромая ладья" может ходить по прямой вправо или вверх. Исходно она стоит в нижнем левым углу доски. Играют двое. Выигрывает тот, кто поставит ладью в верхний правый угол.

**Решение:** Исходно ладья стоит на главной (в данном случае - главной) диагонали доски. Первый игрок своим ходом уводит ее с диагонали в сторону. Тогда второй игрок может вернуть ладью обратно на диагональ (посмотрите, как). Потом первый опять уведен ее с диагонали (ходов с главной диагонали на нее же нет), а второй... опять сможет вернуть и т.д. Так так клетка назначения лежит на главной диагонали, то на ней ладья обязательно окажется после хода второго - и второй выигрывает.

## Индукция.

Метод математической **индукции** - не просто распространенный метод решения олимпиадных задач, но и способ доказательства многих утверждений в математической науке

Доказательство по индукции протекает следующим образом. У нас есть ряд утверждений (обычно - бесконечно длинный), которые надо доказать. И для этого достаточно доказать всего два утверждения:

1.) **База индукции:** первое утверждение ряда верно.

2.) **Переход индукции:** если верно какое-то утверждение ряда (неважно, *какое именно*), то верно и следующее за ним утверждение ряда.

Почему же тогда верны все утверждения ряда? Первое утверждение верно по базе индукции. По переходу индукции мы получаем, что если верно первое утверждение ряда, то верно и второе. Значит, верно и второе утверждение. Еще раз применяем переход: если верно второе утверждение, то верно и третье. Значит, третье утверждение тоже верно. Сделав еще один такой шаг, мы получим, что вернои четвертое утверждение. Затем - пятое, шестое... десятое... сотое... тысячное... миллионное... В общем, верно утверждение ряда со сколь угодно большим номером, то есть *любое*, то есть *каждое* - что и требовалось доказать.

Такой ряд утверждений, где у каждого утверждения есть свой порядковый номер ("первое", "второе" и т.п.) называется "ряд утверждений, занумерованных натуральными числами". И факт наличия в задаче такого ряда следует понимать весьма творчески. Часто имеется *одно* утверждение (У), но в нем есть какой-то *параметр* (например, n), являющийся натуральным числом. Тогда первое утверждение ряда ($У_1$) - это утверждение У при n=1. Второе утверждение ряда ($У_2$) - это утверждение У при n=2... сотое ($У_{100}$) - это утверждение У при n=100 и т.д. Часто утверждение У - это тождество с одной натуральной переменной (иногда и с несколькими - но об этом ниже). Иногда в задаче просят доказать только одно конкретное утверждение ряда (например, $У_5$, $У_7$ или $У_{10}$) - но это нельзя сделать проще, чем доказать весь ряд по индукции (см. примеры ниже).

**Задача 27.** Докажите, что 1+2+...+N=N(N+1)/2 (такие числа называются "треугольными": 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...).

**Решение:** Докажем по индукции (обычно говорят "докажем индукцией по N", т.е. по переменной, значением которой нумеруются утверждения в ряду).

**База:** N=1 - и действительно, 1=1(1+1)/2.

**Переход:** Пусть тождество верно для какого-то *значения* N, которое мы теперь тоже *обозначим за N*. Надо доказать, что оно верно и для значения, на 1 большего, т.е. (в новом смысле буквы N) для N+1. Теперь *предположение индукции* будет выглядеть, как 1+2+...+N=N(N+1)/2, а то, что надо доказать - как результат подстановки сюда N+1 вместо N, т.е. 1+2+...+N+(N+1)=(N+1)(N+2)/2.

Техническая часть - из одного равенства вывести другое - трудностей не представляет: 1+2+...+N+(N+1) = N(N+1)/2+(N+1) - по предположению индукции (т.е. по первому равенству). А это равно (N+1)(N/2+1) = (N+1)(N+2)/2, ч.т.д.

**Задача 28.** Докажите, что $1+3+...+(2N-1)=N^2$ - сумма первых N нечетных чисел равна $N^2$.
**Решение:** Докажем индукцией по N, но теперь эту идейную подтасовку будет опускать.
**База:** N=1 - действительно, $1=1^2$.
**Переход:** Предположение индукции: $1+3+...+(2N-1)=N^2$ - так и пишут в индуктивных доказательствах, скрывая ту подтасовку, которая была продемонстрирована в решении предыдущей задаче (и сбивая с толку тех, кто плохо понимает метод индукции!). Утверждение, которое надо доказать: $1+3+...+(2N-1)+(2*(N+1)-1) = (N+1)^2$ - т.е. $1+3+...+(2N-1)+(2N+1) = (N+1)^2$. Его левая часть, по предположению индукции - это $N^2+2N+1$, что, конечно же, равно $(N+1)^2$, ч.т.д.

**Задача 29.** Докажите, что $2^N>N$ при любом натуральном N.
**Решение:** Докажем индукцией по N.
**База:** N=1 - действительно, $2^1=2>1$.
**Переход:** Предположим, что при некотором N $2^N>N$. Теперь докажем, что $2^{N+1}>N+1$. Действительно, $2^{N+1}=2*2^N>2N$ по предположению. А $2N>=N+1$ при всех N (очевидно), откуда $2^{N+1}>N+1$, ч.т.д.

**Задача 30.** Докажите, что $3^{2N+2}+8N-9$ делится на 16 при любом натуральном N.
**Решение:** Докажем индукцией по N.
**База:** N=1 - действительно, $3^{2*1+2}+8*1-9=80$ - делится на 16.
**Переход:** Уже известная махинация сводит доказательство перехода к следующему утверждению: если $3^{2N+2}+8N-9$ делится на 16, то $3^{2(N+1)+2}+8(N+1)-9$ делится на 16. Последнее число равно $3^{2N+4}+8N+8-9 = 9*3^{2N+2}+8N+8-9 = 8*3^{2N+2}+3^{2N+2}+8N+8-9 = 8*(3^{2N+2}+1)+3^{2N+2}+8N-9$ Сумма последних трех слагаемых делится на 16 по предположению, а первое - как произведение 8 и четного числа $3^{2N+2}+1$, ч.т.д.

**Задача 31.** Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние были разных цветов (как принято говорить, "шахматная раскраска").
**Решение:** Докажем индукцией по количеству прямых.
**База:** 1 прямая - все просто: покрасим 2 части, на которые она делит плоскость, в 2 разных цвета.
**Переход:** (от N прямых к N+1 прямой) Временно сотрем одну прямую. По предположению индукции, полученную картинку (на ней уже не N+1 прямая, а N) раскрасить можно. Теперь вернем стертую прямую на место. Ясно, что все пары соседних областей одного цвета граничат как раз по этой прямой. Так давайте по одну сторону от нее перекрасим все области в противоположный цвет (*все*, а не только те, которые с ней граничат!) Тогда новых соседних областей одного цвета по эту сторону не появится, а те,

которые граничили по этой прямой, станут разных цветов - и мы получаем искомую раскраску, ч.т.д.

## Инвариант.

Бывает он в задачах, где мы имеем дело с какими-то операциями, с каким-то процессом, который изменяет данный в условии объект. Вот если у объекта есть какое-то свойство или характеристика, которая **не меняется** при этих операциях - она и называется *инвариантом*.

**Задача 32.** В файле хранятся 2021 единицы и 2022 нуля. Программа читает из файла два произвольных числа, стирает, и записывает на их место 0, если они были равны, и 1, если нет. Программа запускается многократно. В конце в файле остается только одно число. Чему оно равно, 0 или 1?

**Решение:** Несмотря на то, что вариантов действия программы очень много, мы можем установить ответ однозначно. Что может прочитать программа за каждый отдельный запуск? Либо 0 и 0 (и записать 0), либо 0 и 1 (и записать 1), либо 1 и 1 (и записать 0). В первых двух случаях *сумма всех чисел* в файле *не меняется*, в последнем - уменьшается *на 2*. В любом случае, *четность* этой суммы *остается прежней*. Исходно сумма была 2021*1+2022*0=2021 - нечетная, значит, *и в конце* будет нечетная. Но в конце остается только одно число - оно и равно сумме всех - поэтому *оно нечетное*. А так как в файле бывают только нули и единицы, то это 1.

**Задача 33.** Имеются три числа, которые можно заменять по следующим правилам: числа a, b и c стираются и вместо них записываются (a+b)/2, (b+c)/2 и (a+c)/2.Можно ли из чисел 101, 73, 125 получить 77, 79 и 83?

**Решение:** А давайте так, "на всякий случай", посмотрим, как меняется сумма чисел. Было a+b+c, а стало... вместо них записываются (a+b)/2+(b+c)/2+(a+c)/2 = (2a+2b+2c)/2 = a+b+c -*не изменилась*. То есть, как ни крути, а *сумма трех чисел* не меняется. Но 101+73+125=299, а 77+79+83=239 - суммы исходной и конечной тройки разные. Поэтому из одной *нельзя*получить другую.

**Задача 34.** В стране серобуромалинии 27 серых, 32 бурых и 45 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разных цветов, они оба перекрашиваются в третий цвет. Могут ли когда-нибудь все хамелеоны стать одного и того же цвета?

**Решение:** В качестве чисел возьмем количества хамелеонов серого, бурого и малинового цвета. При любом ходе либо (A, B, C) переходит в (A-1, B-1, C+2) - встречаются серый и бурый хамелеоны и перекрашиваются в малиновый цвет, либо в (A-1, B+2, C-1) - серый и малиновый в бурый, либо, наконец, в (A+2, B-1, C-1) - бурый и малиновый в серый. Сумма всех трех, конечно, сохраняется, но это нам не помогает. А вот разность между ними и третьим изменится *ровно на 3*. То есть *по модулю 3*, все попарные разности неизменны (сравните, как в задаче 1, из того, что сумма может уменьшаться на 2, мы находили, что ее четность неизменна). Значит, *инвариант* - значения попарных разностей по mod 3. Если какая-то разность в конце стала нулем (а так будет, если два количества станут нулями!), то исходно она делилась на 3. Но разности между исходными количествами на 3 не делится! Значит, не могут...

**Задача 35.** На доске 3x5 все клетки белые, а один угол черный. За ход можно поменять цвет всех клеток в одной строке или столбце. Можно ли все клетки сделать белыми?

**Решение:** Четность числа черных клеток *на всей доске*, меняется, а потому нам не поможет. Где бы найти такую часть доски, на которой эта четность неизменна? У нас тут в условии нерегулярность в углу - так возьмем 4 угла. При операции перекрашивания меняет цвет *ровно два* угла, либо *ни один* - т.е. четность числа черных углов -*инвариант*. Но в начале такой угол один, а в конце хочется ноль - нельзя.

## Литература.


1. С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В.Фомин, Ленинградские математические кружки, Издательство АСА г. Киров – 1994 год
2. Н.В. Горбачёв, Сборник олимпиадных задач по математике, Издательство МЦНМО г. Москва – 2005 год
3. Р.М. Фёдоров, А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи, И.В. Ященко, Московские математические олимпиады, Издательство МЦНМО г. Москва – 2006
4. В.М. Гуровиц, В.В. Ховрина, Графы, Издательство МЦНМО г. Москва – 2009
5. Л.Э. Медников, Чётность, Издательство МЦНМО г. Москва – 2009
6. А. Шень, Математическая индукция, Издательство МЦНМО г. Москва – 2004
7. А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи, Как решают нестандартные задачи, Издательство МЦНМО г. Москва – 2009
8. Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, С.А. Шестаков, И.И. Юдина, Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса, Издательство Вита-Пресс г. Москва – 2006
9. М. Шабунин, Уравнения, Издательство Чистые пруды г. Москва – 2005
10. С.А. Гомонов, Замечательные неравенства, Издательство Дрофа г. Москва – 2006