МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный энергетический университет

ОПТИКА. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

СБОРНИК ЗАДАЧ

для расчетных заданий по курсу «Физика»

(с методическими указаниями и примерами решения типовых задач)

Казань 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный
энергетический университет

Утверждено
учебным управлением КГЭУ

ОПТИКА. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

СБОРНИК ЗАДАЧ

для расчетных заданий по курсу «Физика»

(с методическими указаниями и примерами решения
типовых задач)

Казань 2012

УДК 53
ББК 22.3
Г93

Матухин В.Л., Гонюх Е.А., Килеев А.И., Корягина Е.Л., Тузова Л.Л.

Г93 Оптика. Основы квантовой механики и атомной физики. Сб. задач для расчетных заданий по курсу «Физика» (с методическими указаниями и примерами решения типовых задач). Матухин В.Л., Гонюх Е.А., Килеев А.И., Корягина Е.Л., Тузова Л.Л. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2012. – 124 с.

Содержит задачи для расчетных заданий по основным темам раздела «Оптика. Основы квантовой механики и атомной физики» курса «Физика», предусмотренных учебным планом.

По каждой теме даются методические указания к решению задач и приводятся примеры анализа и решения типовых задач, что облегчает проблему поиска и обоснования выбранного способа решения.

Предназначено для студентов 1 и 2 курсов всех специальностей КГЭУ.

УДК 53
ББК 22.3

Занятие № 1

Тема: **Геометрическая оптика. Элементы фотометрии**

Краткая теория

В волновой оптике свет рассматривается как электромагнитные волны. Согласно теории Максвелла, в электромагнитной волне синхронно колеблются векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля. Так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны и образуют с направлением распространения правовинтовую систему, то электромагнитные волны являются *поперечными* (рис. 1.1).

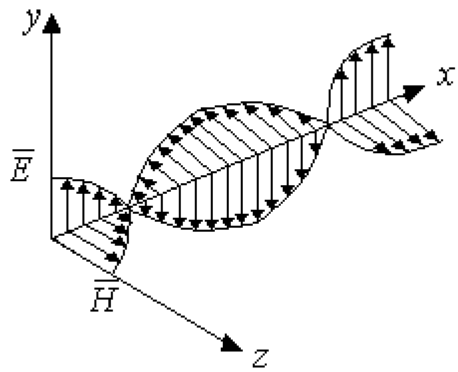


Рис. 1.1

Поскольку основные действия света (физиологические, фотоэлектрические и т.д.) вызываются колебаниями электрического (его называют также световым) вектора, то обычно рассматривают только колебания вектора напряженности электрического поля.

Из уравнений Максвелла следует, что изменение светового вектора описывается уравнением волны

$$E = E_m \cos(\omega t - kr + \alpha) = E_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \alpha\right],$$

где ω – циклическая частота, α – начальная фаза колебаний, r – расстояние вдоль направления распространения световой волны, k – волновое число, λ – длина волны, υ – фазовая скорость распространения волны в данной среде

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{c\upsilon}{\nu c} = \lambda_0 \frac{\upsilon}{c} = \frac{\lambda_0}{n},$$

где ν – частота падающего света, n – показатель преломления, характеризующий оптические свойства среды. Если n среды везде одинаков, то среда называется *оптически однородной*. Если световая волна имеет одну строго постоянную частоту, она называется *монохроматической*.

Геометрическая оптика – раздел физики в котором рассматривается взаимодействие света с телами, линейные размеры которых несоизмеримо больше длин волн видимого света. Поэтому при таком взаимодействии волновая природа света не проявляется. Законы распространения света рассматриваются на основе представления о световых лучах.

Световые лучи – нормальные к волновым поверхностям линии, вдоль которых распространяется поток световой энергии.

Волновая поверхность – поверхность одинаковой фазы. За направление светового луча принимают направление распространения света. Луч распространяется вдоль линии, перпендикулярной волновому фронту.

Принцип Гюйгенса. Каждая точка поверхности, которой достигла в данный момент волна, является точечным источником вторичных волн. Совокупность точек, до которых дошел процесс распространения волны, называется *волновым фронтом*.

В основе геометрической оптики лежат следующие законы:

Закон прямолинейного распространения света. Свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Закон отражения света. Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный из точки падения к границе раздела сред, лежат в одной плоскости. Угол падения α равен углу отражения β (рис. 1.2).

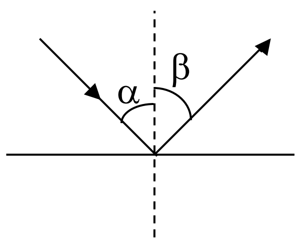


Рис. 1.2

Закон преломления света. Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости (рис. 1.3). Отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления γ есть величина постоянная для данных сред, равная отношению абсолютных показателей преломления второй среды n_2 к первой n_1

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

где n_{21} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

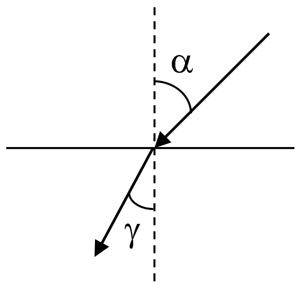


Рис. 1.3

Абсолютный показатель преломления n показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше, чем в вакууме

$$n_1 = \frac{c}{\upsilon_1}, \; n_2 = \frac{c}{\upsilon_2},$$

где c – скорость света в вакууме, υ_1 и υ_2 – скорости света в соответствующих средах.

Явление полного внутреннего отражения. Если луч света падает из оптически более плотной среды с показателем преломления n_2, на границу раздела с оптически менее плотной средой с показателем преломления n_1 ($n_2 > n_1$), то при углах падения $\alpha > \alpha_0$ наблюдается полное внутреннее отражение, когда луч полностью отражается от границы раздела сред (как от идеального зеркала) (рис. 1.4). Предельный угол полного внутреннего отражения α_0 находится из условия

$$n_2 \sin\alpha_0 = n_1 \sin 90^\circ, \; \sin\alpha_0 = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}.$$

Если $n_1 = 1$ (среда – воздух), то $\sin\alpha_0 = \dfrac{1}{n_2}$.

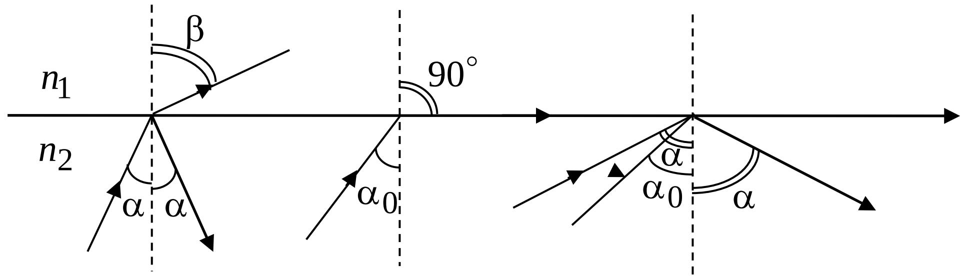


Рис. 1.4

Плоским зеркалом называется поверхность, при отражении от которой падающие на нее параллельные лучи остаются параллельными и после отражения.

Изображение точечного источника S в плоском зеркале строится так: надо выбрать любые два луча 1 и 2, падающие от источника на зеркало, построить отраженные лучи и провести продолжения этих лучей до их пересечения в точке S'. В этой точке на расстоянии $OS' = OS$ от зеркала мы получим мнимое изображение источника S (рис. 1.5). На рисунке 3 – плоское зеркало.

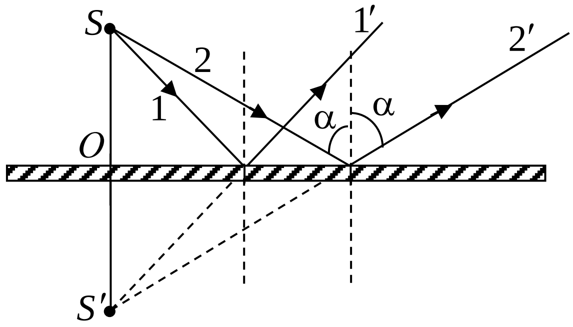


Рис. 1.5

Изображение предмета: плоское зеркало отражает свет, приходящий из точек A и B. Выбираем 2 произвольные пары отраженных лучей от точек A и B и продолжаем их до пересечения за зеркалом в точках A' и B'. Мы получим мнимое изображение $A'B'$. Его размеры такие же, как у предмета AB (рис. 1.6), где 3 – плоское зеркало.

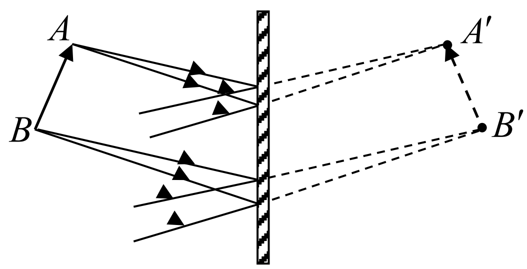


Рис. 1.6

Линзы

Важнейшим элементом оптических приборов и систем (очки, телескопы и т.д.) является линза.

Линзой называется прозрачное тело, ограниченное двумя поверхностями (одна из них обычно сферическая, а вторая – сферическая или плоская). По своим оптическим свойствам линзы делятся на собирающие и рассеивающие.

Тонкая линза – линза, если ее толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) значительно меньше радиусов поверхностей, ограничивающих линзу.

Главная оптическая ось линзы – прямая O_1O_2, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы (рис. 1.7).

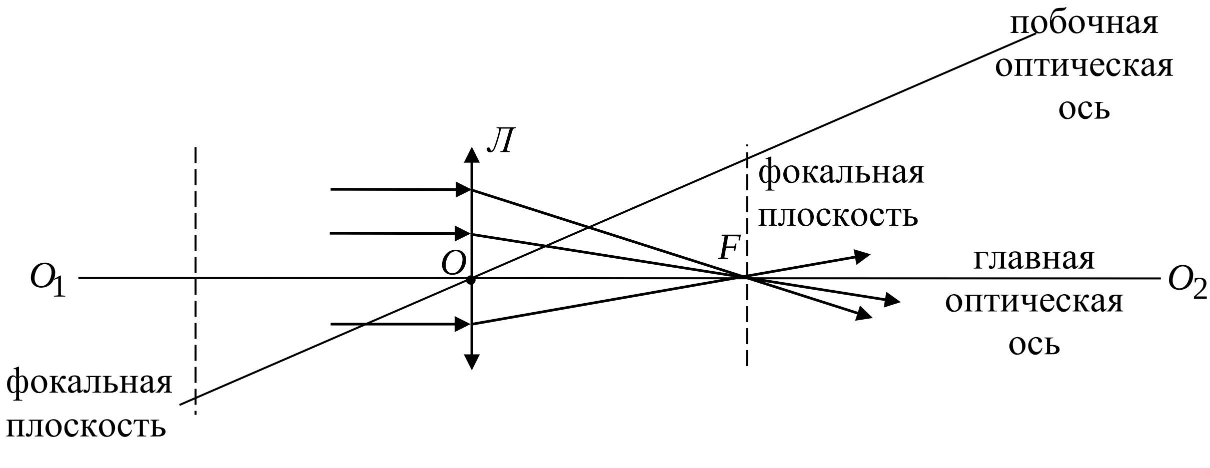


Рис. 1.7

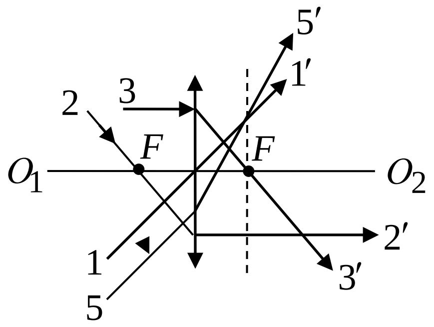
Оптический центр линзы – точка *O*, лежащая в центре линзы на главной оптической оси.

Побочная оптическая ось линзы – любая прямая, проходящая через оптический центр линзы, кроме главной оптической оси. Лучи проходят сквозь точку *O* не преломляясь.

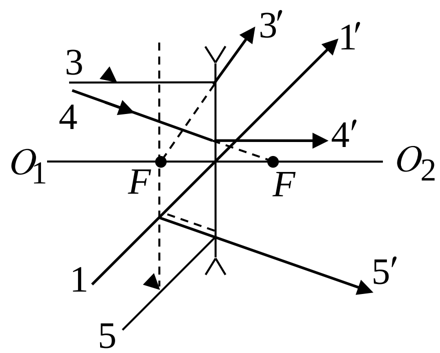
Линза называется *собирающей*, если она преломляет лучи, падающие на нее в направлении главной оптической оси (рис. 1.8а).

Главный фокус линзы – точка F, в которой пересекаются после преломления в собирающей линзе лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси. *Фокусное расстояние* F – расстояние от оптического центра линзы до главного фокуса. *Фокальная плоскость* – плоскость, проходящая через главный фокус перпендикулярно главной оптической оси.

Линза называется *рассеивающей*, если она преломляет лучи, падающие на нее, в направлении от главной оптической оси (рис. 1.8,б).



а) собирающая линза



б) рассеивающая линза

Рис. 1.8

При построении изображений в тонких линзах необходимо пользоваться следующими свойствами лучей:

1) световой луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется (луч 1-1′ на рис. 1.8а,б);

2) световой луч, проходящий через главный фокус собирающей линзы, выходит из нее параллельно главной оптической оси (луч 2-2′ на рис. 1.8а);

3) световой луч, параллельный главной оптической оси собирающей линзы, после преломления пересекает эту ось в главном фокусе за линзой (для рассеивающей линзы луч пересекает ось своим мнимым продолжением в главном фокусе перед линзой) (луч 3-3′ на рис. 1.8а,б);

4) световой луч, направленный на главный фокус за рассеивающей линзой, выходит из нее параллельно главной оптической оси (луч 4-4′ на рис. 1.8б);

5) световой луч, параллельный побочной оси, пересекается с ней в фокальной плоскости. Точка пересечения лучей называется *побочным фокусом*.

Для построения изображения точки необходимо построить ход любых двух характерных лучей, проходящих через эту точку. Построение изображения любого предмета сводится к построению изображений отдельных его точек. Для получения изображения прямой достаточно построить изображение двух ее точек.

Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от линзы до предмета, f – расстояние от линзы до изображения предмета, F – фокусное расстояние ($F > 0$ для собирающей линзы, $F < 0$ для рассеивающей линзы).

Мнимому изображению в линзах соответствует отрицательное значение f.

Отношение

$$D = \frac{1}{F}$$

есть *оптическая сила линзы* ($D > 0$ для собирающей линзы, $D < 0$ для рассеивающей линзы).

Единица измерения D – диоптрия (1 дптр = 1 м$^{-1}$).

Линейное увеличение

$$Г = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

где H – линейный размер изображения, h – линейный размер предмета.

Для собирающей линзы в зависимости от значения d реализуются следующие изображения:

1) $d > 2F$ – изображение действительное, перевернутое, уменьшенное ($Г < 1$);

2) $d = 2F$ – изображение действительное, перевернутое, в натуральную величину ($Г = 1$);

3) $F < d < 2F$ – изображение действительное, перевернутое, увеличенное ($Г > 1$);

4) $d < F$ – изображение мнимое, прямое, увеличенное ($Г > 1$).

Для рассеивающей линзы для всех случаев изображение мнимое, прямое, уменьшенное ($Г < 1$).

Элементы фотометрии

Фотометрия – раздел оптики, занимающийся вопросами измерения интенсивности света и его источников. В фотометрии используются следующие величины:

1. Энергетические величины:

Поток излучения Φ_e равен отношению энергии W излучения ко времени t, за которое излучение произошло

$$\Phi_e = \frac{W}{t}.$$

Единица измерения ватт (Вт).

Энергетическая светимость – отношение потока излучения, испускаемого поверхностью, к площади сечения S, сквозь которое этот поток проходит

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}.$$

Единица измерения Вт/м^2.

Энергетическая сила света – отношение потока излучения источника к телесному углу Ω, в пределах которого это излучение распространяется

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}.$$

Единица измерения Вт/ср.

Ср – стерадиан, единица измерения телесного угла.

Телесный угол – часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью.

2. Световые величины:

Световой поток Φ – мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению.

Единица измерения люмен (лм).

Светимость определяется соотношением

$$R = \frac{\Phi}{S}.$$

где S – площадь поверхности, сквозь которую проходит световой поток.

Единица измерения лм/м^2.

Освещенность – отношение светового потока Φ, падающего на поверхность, к площади S этой поверхности

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Единица измерения люкс (лк).

Сила света задается отношением

$$I = \frac{\Phi}{\Omega},$$

где Ω – телесный угол, внутри которого распространяется световой поток.

Единица измерения кандела (кд).

Яркость B_φ светящейся поверхности в некотором направлении φ есть величина, равная отношению силы света I в этом направлении к площади S проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению

$$B_\varphi = \frac{I}{S\cos\varphi}.$$

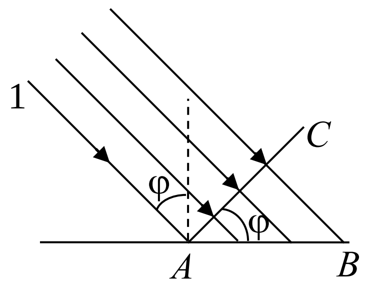


Рис. 1.9

На рис. 1.9 луч 1 падает на площадку AB под углом φ. Площадка AC перпендикулярна лучу 1.

Единица измерения – кд/м^2.

Световая эффективность (светоотдача)

$$L = \frac{\Phi}{P},$$

где P – мощность источника света.

Примеры решения задач

Задача 1.1. На дне озера глубиной H = 100 см находится точечный источник света S. Найти радиус светового пятна на поверхности воды, если показатель преломления воды n = 1,3.

Решение

H = 100 см = 1 м n = 1,3
R – ?

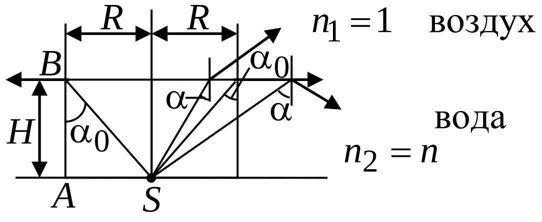


Рис. 1.10

Если лучи падают на границу раздела вода-воздух под углом $\alpha < \alpha_0$, то они выходят в атмосферу. Если $\alpha > \alpha_0$, то луч света испытывает полное внутреннее отражение и возвращается в воду. На поверхности воды будет освещена площадка радиуса R, равная площади основания конуса с вершиной в точке S и боковой поверхностью, образованной лучами, падающими на поверхность озера под углом α_0. Для этих лучей

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим ΔABS:

$$\sin\alpha_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}},$$

следовательно, $\frac{1}{n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}$, откуда $R = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 1{,}2$ м.

Ответ: R = 1,2 м.

Задача 1.2. На каком расстоянии d от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние l между ним и его действительным изображением было минимальным? F = 10 см.

Решение

F = 10 см = 0,1 м l = min
d – ?

Расстояние между предметом и изображением

$$l = d + f,$$

откуда

$$f = l - d. \qquad (1)$$

По формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Учитывая (1)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{l-d} = \frac{1}{F}. \qquad (2)$$

Из (2) найдем d

$$d^2 - dl + FL = 0,$$

$$d = 0{,}5l \pm \sqrt{0{,}25l^2 - Fl}, \qquad (3)$$

так как d, l, F – действительные числа, то

$$0{,}25l^2 - Fl \geq 0.$$

Когда расстояние l будет минимальным?

Поскольку изображение по условию действительное, то $F > 0$ и $l > 0$.

При $l = l_{\min}$

$$0{,}25l^2 - Fl = 0,$$

откуда

$$l = 4F. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$d = 0{,}5 \cdot 4F \pm \sqrt{0{,}25 \cdot 16F^2 - F \cdot 4F},$$

$$d = 2F = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см.}$$

Ответ: d = 20 см = 0,2 м.

Задача 1.3. Высоко над горизонтальной поверхностью расположен точечный источник света с силой света I = 50 кд. Между ним и поверхностью помещается собирающая линза с оптической силой $D = 5$ дптр так, что источник света находится в ее фокусе. Найти освещенность E поверхности под линзой.

Решение

$I = 50$ кд $D = 5$ дптр $d = F$	Освещенность поверхности – это отношение светового потока, падающего на нее, к освещаемой площади
$E - ?$	

$$E = \frac{\Phi}{S}. \qquad (1)$$

Так как источник находится в фокусе линзы ($d = F$, где $F = 1/D$), то лучи после линзы пойдут параллельно ее главной оптической оси, образуя светящийся цилиндр (рис. 1.11).

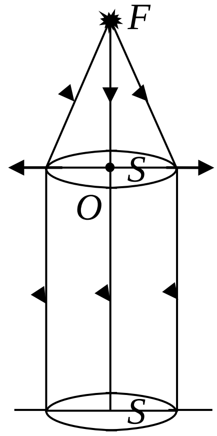


Рис. 1.11

Согласно сказанному

$$d = \frac{1}{D},$$

кроме того $\Phi = I\Omega$, где

$$\Omega = \frac{S}{d^2} = SD^2 \text{ и } \Phi = ISD^2. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$E = \frac{ISD^2}{S} = ID^2 = 50 \cdot 5^2 = 1250 \text{ лк.}$$

Ответ: $E = 1250$ лк.

Задачи для самостоятельного решения

1. На плоскопараллельную стеклянную пластину (n = 1,5) толщиной d = 5 см падает под углом α = 30° луч света. Определите боковое смещение луча, прошедшего сквозь эту пластинку.

Ответ: x = 9,7 мм.

2. Расстояние a от предмета до вогнутого сферического зеркала с R = 20 см равно 15 см. Чему равно увеличение зеркала r?

Ответ: r = 2.

3. Двояковыпуклая линза с $n = 1{,}5$ имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей, равные 10 см. Изображение предмета с помощью этой линзы оказывается в 5 раз больше предмета. Определить расстояние от предмета до изображения.

Ответ: (a + b) = 0,72 м.

4. На какую высоту над чертежной доской необходимо повесить лампочку мощностью $P = 300$ Вт, чтобы освещенность доски под лампочкой была равна $E = 60$ лк. Наклон доски составляет 30°, а светоотдача лампочки 15 лм/Вт. Полный световой поток, испускаемый точечным источником света, $\Phi_0 = 4\pi I$.

Ответ: h = 2,27 м.

5. Докажите, что в том случае, когда яркость источника не зависит от направления, светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$.

6. Величина прямого изображения предмета вдвое больше самого предмета. Расстояние между предметом и изображением равно 20 см. Найти фокусное расстояние линзы. Сделать построение.

Ответ: F = 0,4 м.

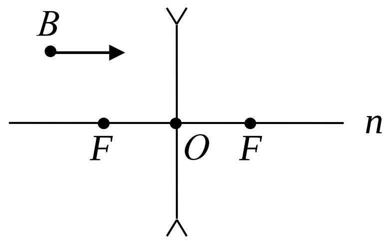
7. С какого наибольшего расстояния r можно заметить ночью огонек сигареты, сила света которой $I = 2 \cdot 10^{-3}$ кд, а минимальный световой поток, воспринимаемый глазом, $\Phi = 1 \cdot 10^{-13}$ лм. Диаметр суженного в темноте зрачка $D = 7$ мм?

Ответ: $r = 877$ м.

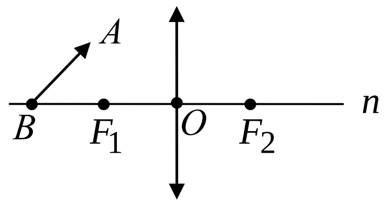
8. Высота солнца увеличилась с $\varphi_1 = 30^\circ$ до $\varphi_2 = 45^\circ$. Во сколько раз изменилась освещенность земной поверхности?

Ответ: 1,4.

9. Построить изображение стрелки AB, даваемой рассеивающей линзой.



10. Построить изображение стрелки AB, даваемой собирающей линзой.



11. Над центром круглого стола радиусом $R = 1$ м висит лампа с силой света $I = 100$ кд. Построить график зависимости освещенности E края стола от высоты h лампы над столом $E = E(h)$ в интервале от 0,5 до 0,9 м через каждые 0,1 м.

12. Спираль электрической лампочки с силой света $I = 100$ кд заключена в матовую сферическую колбу диаметром: а) $d = 5$ см; б) $d = 10$ см. Найти светимость R и яркость B лампы. Потерей света в оболочке колбы пренебречь.

Занятие № 2

Тема: **Интерференция монохроматического света**

Краткая теория

Интерференция света – частный случай общего явления интерференции волн, заключающийся в пространственном перераспределении энергии светового излучения при суперпозиции электромагнитных волн (чередующиеся минимумы и максимумы на интерференционной картине). Необходимым условием интерференции волн является их когерентность. *Когерентность* – согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

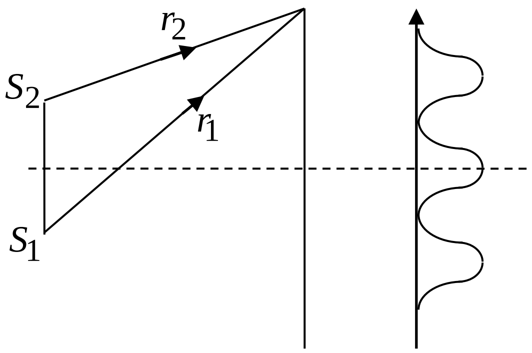
Строго когерентными могут быть только монохроматические волны – неограниченные в пространстве волны с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой.

Условия наблюдения интерференционных максимумов или минимумов имеют вид:

$\Delta = \pm 2m\dfrac{\lambda_0}{2}$ – максимум m-порядка (светлая полоса), m = 0, 1, 2,…;

$\Delta = \pm (2m+1)\dfrac{\lambda_0}{2}$ – минимум m-порядка (темная полоса), m = 0, 1, 2,…;

$\Delta = n_1 r_1 - n_2 r_2$ – оптическая разность хода, где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления сред, в которых распространяются лучи, r_1 и r_2 – расстояния от источников S_1 и S_2 до точки A на экране, λ_0 – длины волны в вакууме.



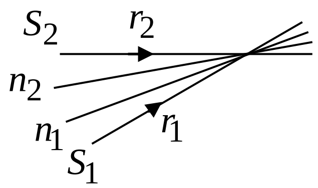


Рис. 2.1

Интерференция света в тонких пленках

Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская монохроматическая волна под углом θ. В результате отражений от обеих поверхностей пластинки исходная волна расщепится на две (лучи 1 и 2 параллельны друг другу). Если оптическая разность хода лучей 1 и 2 мала по сравнению с длиной когерентности (длина когерентности – расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность) падающей волны, то они когерентны, а интерференционная картина определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами.

$$\Delta = n(AB + BC) - \left(AD \pm \frac{\lambda_0}{2} \right),$$

где θ' – угол преломления, n – показатель преломления пластинки, b – толщина пластинки, n_0 – показатель преломления воздуха.

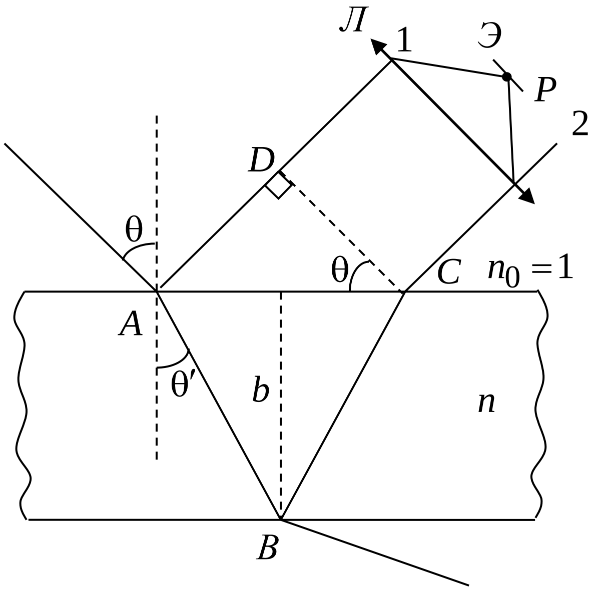


Рис. 2.2

При отражении от верхней поверхности пластинки (от среды, оптически более плотной) происходит скачок фазы на π у отраженной волны, т.е. «потеря» полуволны $\pm\frac{\lambda_0}{2}$. Учитывая, что $\sin\theta = n\sin\theta'$ получим

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

При $n > n_0$ потеря полуволны в точке A и $\frac{\lambda}{2}$ будет иметь знак минус; при $n < n_0$ – потеря полуволны в точке B и $\frac{\lambda}{2}$ надо брать с плюсом.

Условие интерференционного максимума

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Условие интерференционного минимума

$$2b\sqrt{n^2-\sin^2\theta}\pm\frac{\lambda_0}{2}=(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}\quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

где λ_0 – длина волны в вакууме, m – порядок интерференции.

Интерференция может наблюдаться как в проходящем, так и отраженном свете. Максимумам интерференции в отраженном свете соответствуют минимумы в проходящем и наоборот (оптическая разность хода для проходящего и отраженного света отличаются на $\frac{\lambda_0}{2}$).

Интерференционная картина в плоскопараллельных пластинках (пленках) определяется величинами λ_0, b, n и θ. Для данных λ_0, b и n каждому наклону θ лучей соответствует своя интерференционная полоса. Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются полосами равного наклона.

Интерференция от пластинки переменной толщины. На клин с углом α между боковыми гранями падает плоская монохроматическая волна (лучи 1 и 2 рис. 2.3).

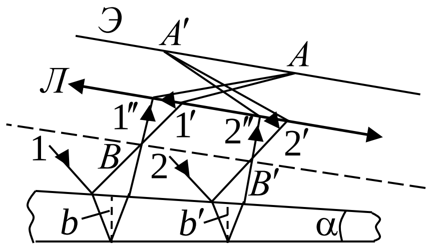


Рис. 2.3

При определенном взаимном положении клина и линзы лучи $1'$ и $1''$, отразившиеся от верхней и нижней поверхности клина, пересекутся в точке A, которая является изображением точки B. В силу когерентности эти лучи будут интерферировать.

Если источник расположен далеко от поверхности клина, а $\alpha\to 0$, то

$$\Delta=2b\sqrt{n^2-\sin^2\theta}\pm\frac{\lambda_0}{2},$$

где b – толщина клина в месте падения на него луча.

Лучи $2'$ и $2''$, отразившиеся от верхней и нижней поверхностей клина при падении на него луча 2 в другой точке, собираются линзой в точке A'. В этом случае оптическая разность хода определяется уже толщиной b'. В результате на экране мы видим систему интерференционных полос.

Кольца Ньютона наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскополяризованной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны R (рис. 2.4). Если параллельный пучок света падает на плоскую поверхность линзы нормально, то полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей.

В отраженном свете

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2}.$$

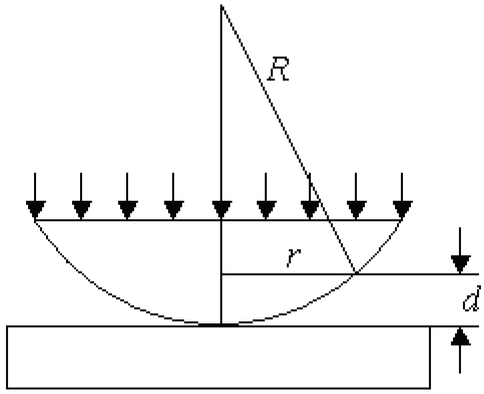


Рис. 2.4

Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластиной. При наложении отраженных лучей возникают полосы равной толщины.

Из рис. 2.4 следует, что

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2,$$

где r – радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор d.

Так как d мал, то

$$d = \frac{r^2}{2R} \text{ и } \Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Следовательно, каждая из полос возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину. Интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции от мест одинаковой толщины, называются *полосами равной толщины*.

Так как верхняя и нижняя грани клина не параллельны между собой, то лучи 1′ и 1″ (2′ и 2″) пересекаются вблизи пластинки, т.е. полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина. Если свет падает на пластинку нормально, то полосы равной толщины локализуются на верхней поверхности клина.

Радиус m-го светлого кольца в отраженном (или темного в проходящем) свете

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Радиус m-го темного кольца в отраженном (или светлого в проходящем) свете

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

(n = 1 для воздуха).

Примеры решения задач

Задача 2.1. Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить, на каком расстоянии от центра экрана будет расположен первый максимум интерференционной картины, если $L = 4$ м, $h = 1$ мм?

Решение

λ = 600 нм = 6 · 10^{-9} м
L = 4 м
n = 1 мм = 10^{-3} м

x_1 – ?

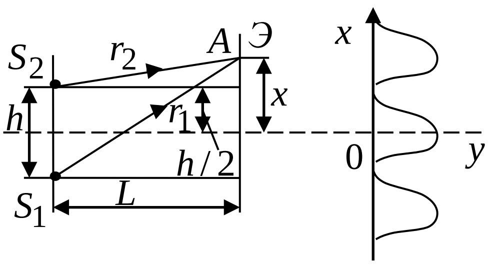


Рис. 2.5

Из рисунка видно, что

$$r_1^2 = L^2 + \left(x + \frac{h}{2}\right)^2,$$

$$r_2^2 = L^2 + \left(x - \frac{h}{2}\right)^2.$$

Вычитывая из первого уравнения второе, имеем:

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2xh,$$

так как $L >> h$, то $r_1 + r_2 \approx 2L$.

С учетом того, что $\Delta = r_1 - r_2$, имеем:

$$\Delta = \frac{2xh}{2L} = x\frac{h}{L}.$$

Условие максимумов интерференционной картины

$$\Delta = \pm 2m\frac{\lambda_0}{2},$$

где λ_0 – длина волны в вакууме.

Приравнивая правые части двух последних равенств, получим:

$$x_m = \pm\frac{m\lambda_0 L}{h}.$$

Для первого максимума $m = 1$, $x_1 = \pm\frac{\lambda_0 L}{n} = \pm 2{,}4$ мм.

Знаки $\pm$ показывают, что максимумы симметрично расположены относительно центра экрана по обе его стороны.

Ответ: $x_1 = \pm 2{,}4$ мм.

Задача 2.2. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников (λ = 600 нм). Определить, на сколько полос сместится интерференционная картина, если на пути одного из лучей перпендикулярно ему поместить стеклянную пластинку (n = 1,6) толщиной d = 4 мкм.

Решение

λ = 600 нм = $6 \cdot 10^{-7}$ м
n = 1,6
d = 4 мкм = $4 \cdot 10^{-6}$ м

---

m – ?

Пластинка изменяет оптическую разность хода интерференционных лучей на

$$\Delta = nd - d = d(n-1),$$

где d – толщина пластинки, n – показатель преломления пластинки.

При внесении пластинки произойдет смещение интерференционной картины на m полос.

Следовательно,

$$\Delta = m\lambda$$

или

$$d(n-1) = m\lambda\,,$$

$$m = d(n-1)/\lambda\,,$$

$$m = 4\,.$$

Ответ: m = 4.

Задача 2.3. На тонкую прозрачную плоскопараллельную пластинку (n = 1,5) под углом $\alpha = 50^\circ$ падает белый свет. Определить толщину пленки, при которой она в проходящем свете будет казаться красной (λ = 670 нм)?

Решение

n = 1,5
λ = 670 нм = 6,7 · 10^{-7} м
α = 50°
$d_{\min}$ – ?

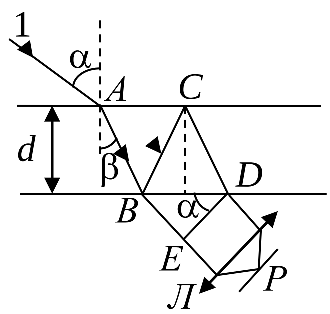


Рис. 2.6

Луч 1, падая на пластинку, частично отражается и частично преломляется в точках A, B, C, D.

Оптическая разность хода между интерферирующими лучами

$$\Delta = 2BC\cdot n - BE$$

(отражение луча в точке C не сопровождается потерей полуволны, а показатель преломления воздуха равен 1). Так как $BC = CD = d/\cos\beta$,

$BE = BD\sin\alpha = 2d\operatorname{tg}\beta\sin\alpha$, а по закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$, получим

$$\Delta = 2dn\cos\beta = 2dn\sqrt{1-\sin^2\beta} = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\,,$$

где d – толщина пластинки, α – угол падения, β – угол преломления.

Условием того, что пленка окрашена (условие максимума) будет $2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = m\lambda$.

Для минимальной толщины m = 1

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 260 \text{ нм.}$$

Ответ: 260 нм.

Задачи для самостоятельного решения

1. На стеклянный клин (n = 1,5) с углом при вершине α=1′ падает под углом i = 18° монохроматический свет с длиной волны λ = 600 нм. Определите расстояние между двумя соседними минимумами при наблюдении интерференции.

Ответ: b = 0,703 мм.

2. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны $r_к = 4{,}0$ мм и $r_{к+1} = 4{,}38$ мм. Радиус кривизны линзы R = 6,4 м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.

Ответ: $k = 5$, $\lambda = 0{,}5\cdot10^{-6}$ м.

3. На пути одного из лучей интерферометра Жамена поместим откачанную трубку длиной l = 10 см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина для длины волны λ = 590 нм сместилась на k = 131 полосу. Найти показатель преломления n хлора.

Ответ: $n \approx$ 1,0008.

4. Определите длину отрезка l_1, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке $l_2 = 5$ мм в стекле. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Ответ:

5. В опыте Юнга расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Опыт Юнга заключается в следующем. Свет от источника света (щели S) падает на две узкие равноудаленные щели S_1 и S_2, параллельные щели S. При этом S_1 и S_2 являются когерентными источниками. На экране, расположенном на некотором расстоянии параллельно S_1 и S_2 наблюдается явление интерференции. Определите угловое расстояние между соседними светлыми полосами, если третья световая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4,% мм.

Ответ: $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$ рад.

6. На плоскопараллельную стеклянную пластинку наложена выпуклой стороной плосковыпуклая линза с радиусом кривизны R = 12 м. На плоскую поверхность линзы параллельно ее главной оптической оси падает пучок монохроматического света с длиной волны λ = 600 нм. При этом в отраженном свете на линзе видны чередующиеся темные и светлые кольца, а в центре – темное пятно. Определить радиус третьего темного кольца.

Ответ: $r = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ м.

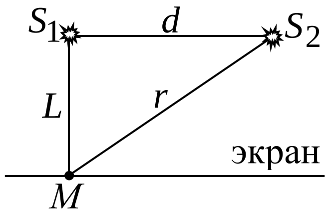
7. На мыльную пленку падает белый свет под углом $\alpha = 45°$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине d пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет (λ = 600 нм)? (n = 1,33).

Ответ: d = 0,13 мкм.

8. Падая на две щели, расположенные на расстоянии 0,0026 мм друг от друга, монохроматический свет образует полосу четвертого порядка под углом $\varphi = 6{,}4''$. Чему равна длина волны падающего света?

Ответ: $\lambda = 7{,}15 \cdot 10^{-7}$ м.

9. Два когерентных источника света S_1 и S_2 с длиной световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м находятся на расстоянии d = 30 мм друг от друга. Экран расположен на расстоянии L = 4 см от каждого источника, что будет наблюдаться на экране в точке M, расположенной напротив источника S_1?



Ответ: максимум.

10. Как изменится расстояние Δx между соседними максимумами освещенности на экране, если:

1) не изменяя расстояния d между когерентными источниками света S_1 и S_2, удалять их от экрана;

2) не изменяя расстояния до экрана L, сближать источники света;

3) уменьшить длину волны света λ, испускаемого источниками?

Ответ: 1) увеличивается, 2) увеличивается, 3) уменьшается.

Занятие № 3

Тема: **Дифракция света**

Краткая теория

Дифракция света – это совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света сквозь малые отверстия, вблизи границ непрозрачных тел и обусловленных волновой природой света. Под дифракцией света обычно понимают отклонения от законов распространения света, описываемых геометрической оптикой.

Для света явление дифракции имеет особенности: длина волны λ много меньше размеров d преград (или отверстий). Поэтому наблюдать дифракцию можно только на достаточно больших расстояниях l от преграды. $\left(l \geq \frac{d^2}{\lambda} \right)$.

Метод зон Френеля. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, действие источника S заменяют действием воображаемых источников, расположенных на волновой поверхности Φ. Амплитуда световой волны определяется в точке M (рис. 3.1).

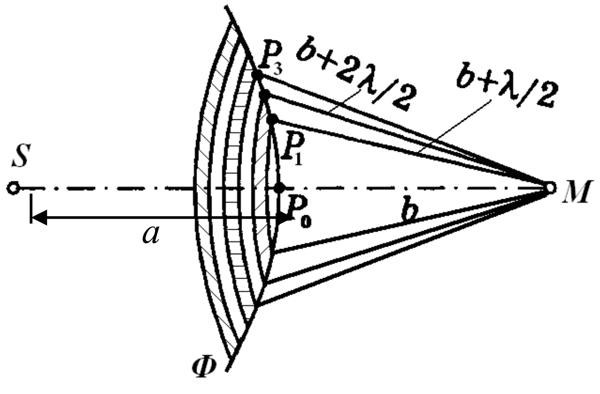


Рис. 3.1

Волновую поверхность *Ф* Френель разбил на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до точки *M* отличались на $\frac{\lambda}{2}$

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = ... = \frac{\lambda}{2}.$$

Колебания от соседних зон проходят до точки *M* расстояния, отличающиеся на $\frac{\lambda}{2}$, поэтому в точку *M* они приходят в противоположной фазе и при наложении эти колебания будут взаимно ослаблять друг друга. Амплитуда результирующего светового колебания в точке *M*

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + ...,$$

где $A_1, A_2, ...$ – амплитуды колебаний, возбуждаемых 1, 2, … зонами.

Амплитуда результирующих колебаний в точке *M*

$$A \approx \frac{A_1}{2}.$$

Площадь *m*-ой зоны Френеля

$$\Delta\sigma_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b},$$

где *a* – расстояние от точечного источника света до волновой поверхности.

Радиус внешней границы *m*-ой зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{maa}{a+b}\lambda}, \quad r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}. \qquad (3.1)$$

Зонные пластинки. В простейшем случае это стеклянные пластинки, на поверхность которых нанесены по принципу расположения зон Френеля чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольца с радиусами r_m зон Френеля, определенными для заданных значений *a*, *b*, λ выражением (3.1)

m = 0, 2, 4, … для прозрачных колец;

m = 1, 3, 5, … для непрозрачных.

Если поместить зонную пластинку в строго определенном месте (на расстоянии *a* от точечного источника и на расстоянии *b* от точки наблюдения на линии, соединяющей эти две точки), то для света длиной волны λ она перекроет четные зоны и оставит свободными нечетные. В результате результирующая амплитуда $A = A_1 + A_3 + A_5 + \ldots$ будет больше, чем при полностью открытом волновом фронте.

Зонная пластинка действует подобно собирающей линзе, увеличивая освещенность.

Дифракция Фраунгофера на щели. *Дифракция Фраунгофера* наблюдается, когда на щель или отверстие направляется параллельный пучок света (плоская волна), а дифракционная картина наблюдается на достаточно большом расстоянии (практически в параллельных лучах).

Плоская монохроматическая волна падает нормально на щель *MN* шириной *a*. Параллельные пучки лучей, выходящие из щели в произвольном направлении φ (φ – угол дифракции), собираются линзой в точке *B* (рис. 3.2).

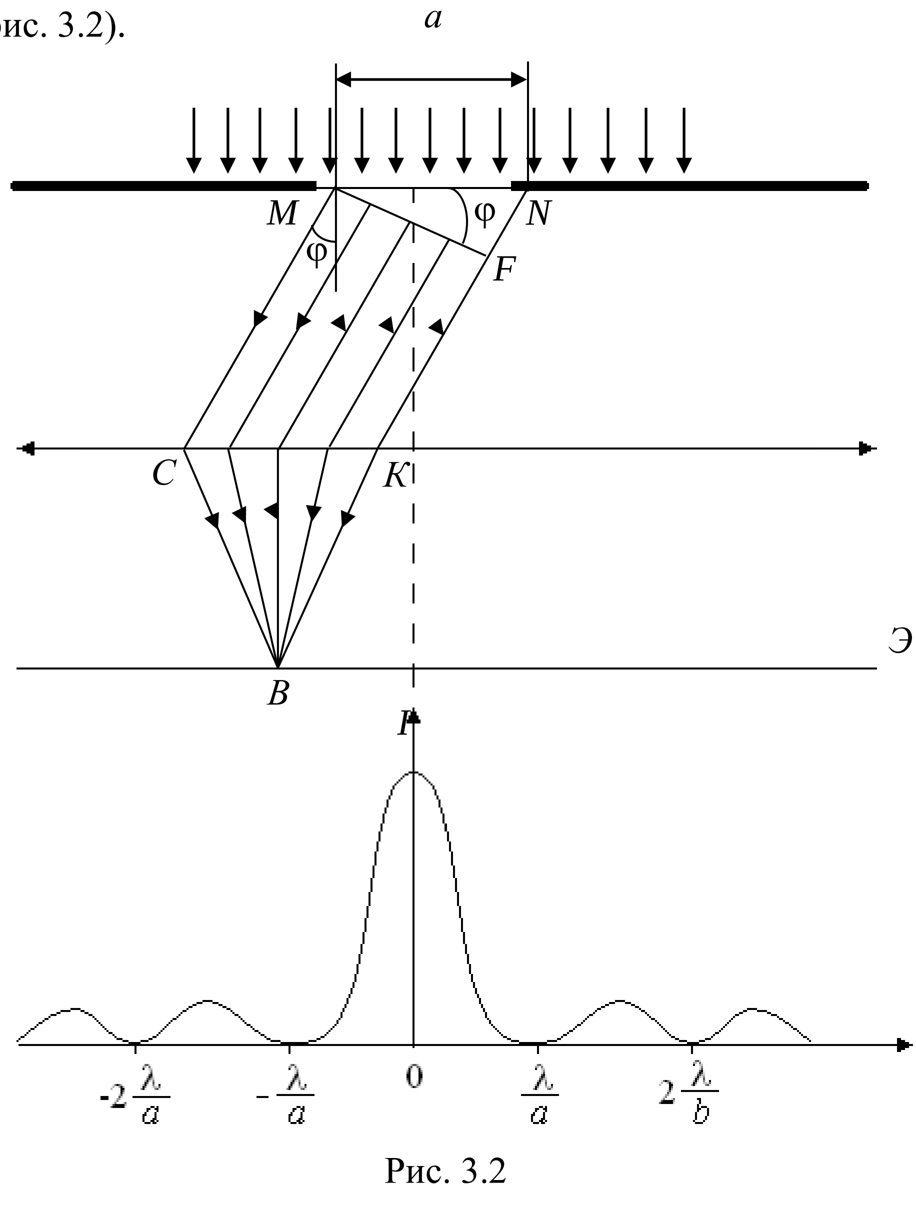


Рис. 3.2

Открытую часть волновой поверхности MN разобьем на зоны Френеля, которые имеют вид полос, параллельных ребру M и проведенные так, чтобы разность хода от их соответственных точек равнялось $\frac{\lambda}{2}$. Тогда оптическая разность хода между крайними лучами MC и NK

$$\Delta = NF = a\sin\varphi.$$

Число зон Френеля, умещающихся на ширине щели,

$$\frac{\Delta}{\lambda/2} = \frac{a\sin\varphi}{\lambda/2}.$$

Условие дифракционного максимума в точке B (число зон Френеля нечетное)

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Условие дифракционного минимума в точке B (число зон Френеля четное)

$$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Дифракционная решетка – спектральный прибор, состоящий из системы параллельных щелей (штрихов) равной толщины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Она предназначена для разложения света в спектр и измерения длин волн.

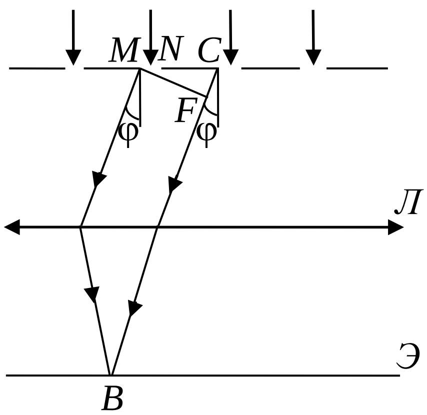


Рис. 3.3

$MN = a$ – ширина щели;

$NC = b$ – расстояние между щелями;

$d = a + b$ – период решетки.

При освещении решетки монохроматическим светом световые волны от всех щелей интерферируют друг с другом, а на экране наблюдается система достаточно узких максимумов.

Если плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачный экран с двумя щелями шириной a, то минимумы будут на тех же местах, как и в случае одной щели, так как те направления, в которых ни одна из щелей не пропускала света, не пропускает его и при двух щелях.

Таким образом, условие главных минимумов

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Из-за взаимной интерференции световых лучей от двух щелей, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т.е. возникнут дополнительные минимумы. Этим направлениям будет соответствовать разность хода лучей $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$, …, посылаемых от соответственных точек обеих щелей (например, точек M и C).

Условие дополнительных минимумов

$$d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, ...).$$

Условие главных максимумов

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

так как в этих направлениях действия щелей усиливают друг друга.

Между двумя главными максимумами располагается дополнительный минимум, а максимумы становятся более узкими, чем в случае одной щели.

В случае N щелей между двумя главными максимумами располагаются $(N - 1)$ дополнительных минимумов, отвечающих условию

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N}, \quad (m' = 0, N, 2N, ...).$$

Имеется также ($N - 2$) дополнительных максимумов, но их интенсивность ничтожна по сравнению с главными максимумами.

Дифракционная решетка является спектральным прибором и характеризуется угловой дисперсией и разрешающей способностью.

Угловая дисперсия D определяет угловую ширину спектра

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi},$$

т.е. угловая дисперсия тем выше, чем больше порядок спектра и чем меньше постоянная решетки.

С увеличением числа щелей решетки главные дифракционные максимумы становятся уже. *Разрешающая способность* дифракционной решетки R характеризует минимальную разность двух монохроматических волн λ_1 и λ_2 равной интенсивности, которые можно видеть в спектре

$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN.$$

Разрешающая способность решетки равна произведению количества щелей на порядок спектра.

Примеры решения задач

Задача 3.1. Определите радиус третьей зоны Френеля, если расстояния от точечного источника света ($\lambda = 600$ нм) до волновой поверхности и от волновой поверхности до точки наблюдения равны 1,5 м.

Решение

$m = 3$

$\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$a = b = 1{,}5$ м

$r_m - ?$

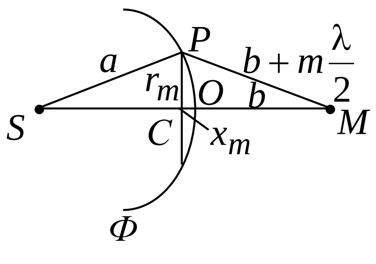


Рис. 3.4

S – точечный источник;

M – точка наблюдения;

Ф – волновая поверхность.

По условию задачи

$$SO = OM = b,$$

$$MP = b + m\frac{\lambda}{2},$$

Радиус границы третьей зоны Френеля

$$CP = r_m$$

$$CO = x_m.$$

Из рис. 3.4 видно, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2 = \left(b - m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x_m)^2. \quad (1)$$

Так как $\lambda << a$ и $\lambda << b$, то членом $\left(m^2\lambda^2/4\right)$ можно пренебречь, тогда

$$x_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}. \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим

$$r_m^2 = 2ax_m - x_m^2.$$

При $x_m << a$

$$r_m^2 = 2ax_m.$$

Подставив (2) в (3) получим

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}} = 1{,}16 \text{ мм}.$$

Ответ: 1,16 мм.

Задача 3.2. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии $L = 1{,}1$ м. Определите расстояние b между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального фраунгоферова максимума.

Решение

a = 0,1 мм = 1 · 10^{-4} м λ = 550 нм = 5,5 · 10^{-7} м L = 1,1 м	Условие дифракционных минимумов от щели $$a\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 1, 2, \ldots),$$
b – ?	где m = 1.

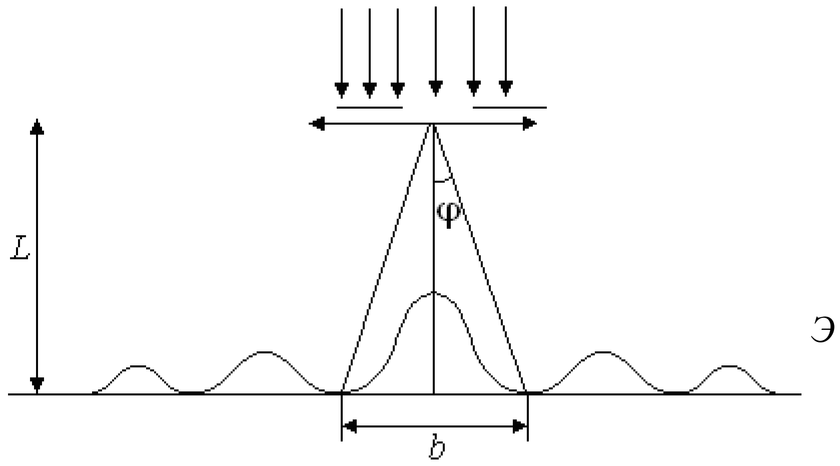


Рис. 3.5

Из рис. 3.5 видно, что

$$b = 2L\mathrm{tg}\varphi, \tag{1}$$

так как $\frac{b}{2} << L$, то $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ и $b = 2L\sin\varphi$, откуда

$$\sin\varphi = \frac{b}{2L}.$$

Подставив в (1), получим

$$b = \frac{2L\lambda}{a} = 1{,}21 \text{ см}.$$

Ответ: 1,21 см.

Задача 3.3. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет (λ = 550 нм). На экран, находящийся от решетки на расстоянии L = 1 м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум находится на расстоянии l = 10 см от центрального. Определите: 1) период дифракционной решетки, 2) число штрихов на 1 см ее длины,

3) общее число максимумов, даваемое решеткой, 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

Решение

$L = 1$ м
$\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
$m = 1$
$l = 10$ см $= 0{,}1$ м
$l' = 1$ см $= 0{,}01$ м

$d - ?$ $n - ?$
$N - ?$ $\varphi_{max} - ?$

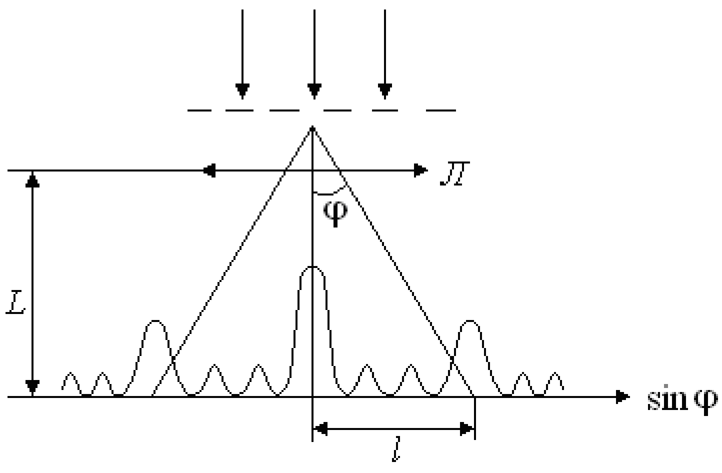


Рис. 3.6

Из условия главного максимума находим период дифракционной решетки

$$d \sin\varphi = m\lambda = 5 \text{ мкм}, \tag{1}$$

где m – порядок спектра ($m = 1$).

Из рис. 3.6 видно, что

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{l}{L},$$

так как $l << L$, то $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ и $\frac{ld}{L} = m\lambda$, откуда

$$d = \frac{m\lambda L}{l}.$$

Число штрихов на $l' = 1$ см

$$n = \frac{l'}{d} = 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

Наибольший угол отклонения лучей решетки не может быть больше $\pi/2$, следовательно, из (1):

$$m_{max} \le \frac{d}{\lambda}, \quad (\sin\varphi_{max} = 1).$$

Общее число максимумов

$$N = 2m_{\max} + 1 = 19,$$

так как максимумы наблюдаются с обеих сторон центрального максимума, а единица учитывает центральный максимум.

Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдем из (1)

$$d \sin \varphi_{\max} = m_{\max} \lambda,$$

откуда $\varphi_{\max} - \arcsin\left(\dfrac{m_{\max}\lambda}{d}\right) = 81{,}9^\circ$.

Ответ: $d = 5$ мкм, $n = 2 \cdot 10^3$ см$^{-1}$, N = 19, $\varphi_{\max} = 81{,}9^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии $l = 4$ см от точечного источника монохроматического света (λ = 500 нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Ответ: R = 10^{-3} м.

2. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Дифракционная картина проецируется на экран с помощью линзы с фокусным расстоянием f = 0,5 м. Определите, как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран.

Ответ: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{20}$, т.е. ширину щели надо уменьшить в 20 раз.

3. На узкую щель нормально падает монохроматический свет. Его направление на четвертую темную дифракционную полосу составляет 2°12′. Определите, сколько длин волн укладывается на ширине щели.

Ответ: 104.

4. На дифракционную решетку длиной l = 15 мм, содержащую N = 3000 штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны λ = 550 нм. Определите: 1) Число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

Ответ: $n = 18$, $\varphi_{max} = 81^\circ 54'$.

5. На дифракционную решетку с постоянной $d = 5$ мкм под углом $\varphi = 30^\circ$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. Определите угол α дифракции для главного максимума третьего порядка.

Ответ: $\varphi = 53^\circ 8'$.

6. Каков период решетки d, если при нормальном падении на нее лучей с длиной волны $\lambda = 0,75$ мкм на экране, отстоящем от решетки на расстоянии $L = 1$ м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на $x = 30,3$ см? Каково число штрихов N на $l = 1$ см решетки? Какое количество m максимумов дает эта дифракционная решетка? Каков максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему максимуму?

Ответ: $d = 4,95 \cdot 10^{-6}$ м, $\dfrac{N}{l} = 2,02 \cdot 10^3$ см$^{-1}$, $m = 13$, $\varphi_{max} = 65^\circ$.

7. Докажите, что разрешающая способность дифракционной решетки не может превысить значения l/λ, где l – длина решетки, λ – длина волны света.

8. Определите максимальную способность (для линии с $\lambda = 590$ нм) двух дифракционных решеток, имеющих одинаковую длину $l = 3$ мм, но разные периоды $d_1 = 3$ мкм и $d_2 = 6$ мкм.

Ответ: $R_1 = 5 \cdot 10^3$, $R_2 = 5 \cdot 10^3$.

9. На диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,05$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Ответ: $b_{max} = 1$ м.

10. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает на диафрагму с диаметром отверстия $d = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $l = 3$ м от нее находится экран. Какое число k зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

Ответ: $k = 5$, центр дифракционной картины будет светлым.

Занятие № 4

Тема: **Распространение света в веществе. Дисперсия и поглощение света**

Краткая теория

Дисперсия света – зависимость фазовой скорости света в среде от его частоты.

Так как $\upsilon = c/n$ (где c – скорость распространения света в вакууме, n – показатель преломления среды), то показатель преломления среды так же зависит от частоты ν (длины волны λ). Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму (рис. 4.1).

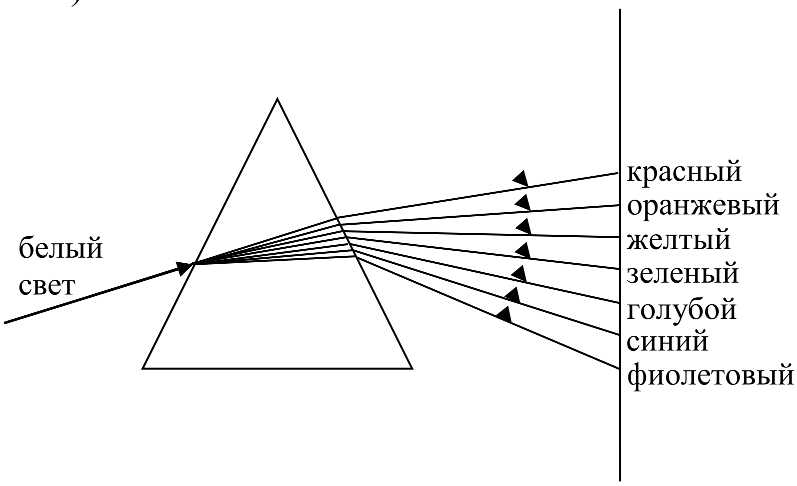


Рис. 4.1

Нормальная дисперсия – когда n увеличивается с уменьшением λ (увеличением ν).

$$\frac{dn}{d\nu} > 0 \ \left(\frac{dn}{d\lambda} < 0\right).$$

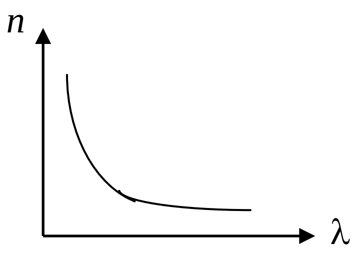


Рис. 4.2

Аномальная дисперсия – когда n уменьшается с уменьшением λ (увеличением ν). Она наблюдается вблизи полос поглощения вещества.

$$\frac{dn}{d\nu} < 0 \left(\frac{dn}{d\lambda} > 0 \right).$$

Количественной характеристикой дисперсии света является физическая величина

$$D_\nu = \frac{dn}{d\nu} \text{ (или } D_\lambda = \frac{dn}{d\lambda}\text{)},$$

называемая *дисперсией показателя преломления* (показывает, как быстро изменяется n с длиной волны λ).

Согласно классической электронной теории *дисперсия света* – результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами вещества, совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Показатель преломления зависит от частоты ω внешнего поля

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где n_0 – концентрация электронов, e – заряд электрона, ε_0 – электрическая постоянная, m – масса электрона, ω_0 – собственная частота колебаний электронов среды (ω_0 = const), ω – частота падающего на вещество света.

Поглощение света – явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии.

Интенсивность света при прохождении однородного вещества уменьшается по экспоненциальному закону. Это:

Закон Бугера-Ламберта

$$I = I_0 e^{-kx},$$

где I_0 и I – интенсивности плоской волны монохроматического света на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x, k – натуральный показатель поглощения.

Рассеяние света – процесс преобразования света веществом, сопровождающийся изменением направления распространения света и появлением несобственного свечения вещества.

Закон Рэлея: интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны возбуждающего света.

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

В результате рассеяния света интенсивность в направлении распространения убывает быстрее, чем в случае одного лишь поглощения. Поэтому

$$I = I_0 - (k - k')x,$$

где коэффициент k' обусловлен рассеянием.

Излучение Вавилова-Черенкова – излучение света заряженными частицами, возникающее при движении в среде с постоянной скоростью V, превышающей фазовую скорость υ света в этой среде, т.е. при условии

$$V > \upsilon = \frac{c}{n},$$

где n – показатель преломления. Наблюдается для всех прозрачных жидкостей, газов и твердых тел.

Излучение распространяется лишь по тем направления, которые составляют острый угол θ с траекторией частицы

$$\cos\theta = \frac{\upsilon}{V} = \frac{c}{nV}.$$

Эффект Доплера в акустике объясняется тем, что частота колебаний, воспринимаемых приемником, определяется скоростями движения источников колебаний и приемника относительно среды, в которой происходит распространение звуковых волн. Эффект Доплера наблюдается так же при движении друг относительно друга источника и приемника электромагнитных волн

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 + (\upsilon / c)\cos\theta},$$

где ν_0 и ν – соответственно частоты световых волн, излучаемых источников и воспринимаемых приемником, υ – скорость источника света относительно приемника, θ – угол между вектором скорости $\vec{\upsilon}$ и направлением наблюдения, c – скорость распространения света в вакууме.

Продольный эффект Доплера наблюдается при движении приемника вдоль линии, соединяющей его с источником ($\theta \neq 0$)

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\upsilon/c}}{\sqrt{1+\upsilon/c}}.$$

При малых относительных скоростях υ ($\upsilon << c$) пренебрегая членами второго порядка малости

$$\nu = \nu_0 (1 - \upsilon/c).$$

Поперечный эффект Доплера наблюдается при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником ($\theta = \pi/2$). Этот эффект является *релятивистским эффектом*. Он связан с замедлением течения времени движущегося наблюдателя и проявляется при скоростях υ, сравнимых со скоростью света c.

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\upsilon^2/c}.$$

Примеры решения задач

Задача 4.1 Показатель преломления воздуха при нормальных условиях ($T_1 = 273{,}15$ К, $p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па) для желтой линии натрия ($\lambda = 589{,}3$ нм) вдали от линий поглощения $n_1 = 1{,}0002918$. Определить показатель преломления n_2 воздуха при температуре $T_2 = 300$ К и давлении $p_2 = 1{,}5$ МПа.

Решение

λ = 589,3 нм = $589{,}3 \cdot 10^{-9}$ м
T_1 = 273,15 К
p_1 = $1{,}013 \cdot 10^5$ Па
n_1 = 1,0002918
T_2 = 300 К
p_2 = 1,5 МПа = $1{,}5 \cdot 10^6$ Па

E – ?

Показатель преломления

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (1)$$

Уравнение состояния идеального газа для двух его состояний:

$$p_1 = n_{01} kT, \quad p_2 = n_{02} kT,$$

где k – постоянная Больцмана.

Тогда

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}. \qquad (2)$$

Согласно уравнению (1)

$$n_1^2 = 1 + \frac{n_{01} e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$n_2^2 = 1 + \frac{n_{02} e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

откуда, учитывая (2), находим

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}. \qquad (3)$$

Решив уравнение (3) относительно n_2, получим

$$n_2 = \sqrt{\frac{(n_1^2 - 1) p_2 T_1}{p_1 T_2} + 1},$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{(1{,}0002918^2 - 1) \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 273{,}15}{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 300} + 1} = 1{,}0039270.$$

Ответ: $n_2 = 1{,}0039270$.

Задача 4.2. Две пластинки одинаковой толщины, но сделанные из разного материала, пропускают соответственно 1/2 и 1/4 падающего потока световой волны. Пренебрегая отражением света, определите отношение коэффициентов поглощения этих пластинок.

Решение

$I_1 = \frac{1}{2} I_0$ $I_2 = \frac{1}{4} I_0$ $x_1 = x_2$	Так как толщины обеих пластинок одинаковы ($x_1 = x_2 = x$), закон Бугера-Ламберта для них $$I_1 = I_0 e^{-k_1 x},$$ $$I_2 = I_0 e^{-k_2 x}.$$
k_2 / k_1 – ?	

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-k_1 x}}{e^{-k_2 x}},$$

так как $\frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{2}$, то произведя элементарные преобразования, получим

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Ответ: $\frac{k_2}{k_1} = 2$.

Задача 4.3. Определить минимальную ускоряющую разность потенциалов $U_{\min}$, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления n = 1,5 возникло черенковское излучение.

Решение

Дано	
m = 9,11 · 10^{-31} кг	
e = - 1,6 ·10^{-19} Кл	
n = 1,5	
c = 3 · 10^8 м/с	
$U_{\min} - ?$	

Направление излучения характеризуются углом θ

$$\cos\theta = \frac{c}{n\upsilon},$$

откуда находим

$$\upsilon = \frac{c}{n\cos\theta}.$$

Скорость минимальна при $\theta = 90^\circ$, т.е. $\cos\theta = 1$.

$$\upsilon_{\min} = c/n,$$

$$E_{\text{кин}} = |e| U_{\min}, \qquad (4)$$

$$E_{\text{кин}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_{\min}^2}{c}}} - 1\right) = mc^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1\right).$$

Подставив последнее выражение в (4), получим

$$U_{\min} = \frac{mc^2}{|e|}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right),$$

$$U_{\min} = \frac{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 3^2\cdot 10^{16}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}5^2-1}} - 1\right) = 175\ \text{кВ}.$$

Ответ: 175 кВ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выведите зависимость угла φ отклонения узкого монохроматического пучка света призмой с показателем преломления n и малым преломляющим углом A.

Ответ: $\varphi = A(n-1)$.

2. Показатель преломления вещества для малого интервала длин волн вдали от линий поглощения определяется формулой Коши: $n = A + B/\lambda^2$, где A и B – эмпирические константы. Определить: 1) фазовую скорость, 2) групповую скорость.

Ответ: 1) $\upsilon = \dfrac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B}$, 2) $u = \dfrac{c\lambda^2(A\lambda^2 - B)}{(A\lambda^2 + B)^2}$.

3. Луч света выходит из стеклянной призмы под тем же углом, что и входит в нее. Определить угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол A = 60°. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Ответ: $\varphi = 37^\circ 11'$.

4. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении пути $2x$.

Ответ: $\dfrac{I_0}{I_2} = 9$.

5. При какой скорости красный свет (690 нм) будет казаться зеленым (530 нм)?

Ответ: 77,4 мм/с.

6. Определить скорость электронов, при которой черенковское излучение происходит в среде с n = 1,54 под углом θ = 30° к направлению их движения. Скорость выразить в долях скорости света.

Ответ: 0,75c.

7. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}5$ мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $0{,}15c$ (c – скорость света в вакууме). Определить длину волны, которую зарегистрирует приемник наблюдателя.

Ответ: λ = 430 нм.

8. Определить кинетическую энергию протонов, которые в среде с показателем преломления $n = 1{,}6$ излучают свет под углом $\theta = 20°$ к направлению своего движения.

Ответ: 0,319 ГэВ.

9. Определить доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода (λ = 486,1 нм), если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $E_{кин}$ = 100 кэВ.

Ответ: $\Delta\lambda$ = 51,7 нм.

10. Плоская монохроматическая световая волна распространяется в некоторой среде. Коэффициент поглощения для данной длины волны a = 1,2 м$^{-1}$. Определить, на сколько процентов уменьшится интенсивность света при прохождении данной волной пути: 1) 10 мм, 2) 1 м.

Ответ: 1) 1,2 %, 2) 70 %.

Занятие № 5

Тема: **Поляризация света**

Краткая теория

Естественный свет – это свет со всевозможными равновероятными направлениями колебаний вектора $\vec{E}$ (и следовательно, $\vec{H}$).

Поляризованный свет – это свет, в котором направления колебаний светового вектора $\vec{E}$ каким-то образом упорядочены.

Плоскополяризованный свет – свет, в котором вектор $\vec{E}$ (и $\vec{H}$) колеблется только в одном направлении, перпендикулярном лучу.

Плоскополяризованный свет получают, пропуская естественный свет через поляризаторы, в качестве которых используются среды, анизотропные в отношении колебаний вектора $\vec{E}$ (например, кристаллы турмалина). Поляризаторы можно использовать и для анализа поляризованного света, тогда их называют *анализаторами*.

Поляризаторы (анализаторы) пропускают колебания, параллельные его главной плоскости и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные ей.

Если поляризатор и анализатор ориентированы произвольно, то интенсивность последовательно прошедшего через них света будет зависеть от угла α между главными плоскостями анализатора (A) и поляризатора (P).

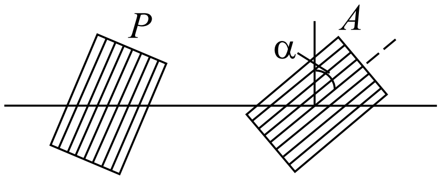


Рис. 5.1

Закон Малюса: интенсивность света, прошедшего последовательно через поляризатор и анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла между их главными плоскостями.

$$I = I_0 \cos^2 \alpha .$$

где I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор, I – интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из анализатора.

В случае падения на поляризатор естественного света с интенсивностью I, на выходе получится плоскополяризованный свет с интенсивностью

$$I_0 = \frac{1}{2} I .$$

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Явление поляризации света – это выделение световых волн с определенными направлениями колебаний электрического (светового) вектора $\vec{E}$. Наблюдается при отражении и преломлении света на границе прозрачных изотропных диэлектриков. Если угол падения света на границу раздела отличен от нуля, то отраженный и преломленный лучи частично поляризованы. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (точки на рис. 5.1), а в преломленном луче преобладают колебания, параллельные плоскости падения (стрелки на рис. 5.1). Степень поляризации зависит от угла падения.

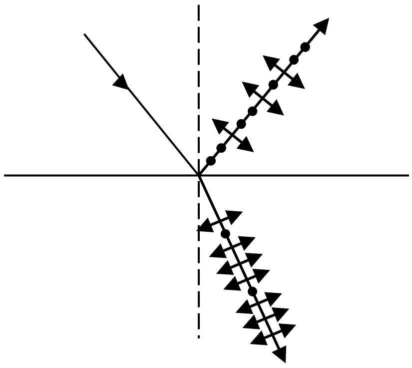


Рис. 5.2

Закон Брюстера. При угле падения естественного света на границу прозрачных изотропных диэлектриков, равном углу Брюстера i_B, определяемого соотношением $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$, отраженный луч полностью поляризован, преломленный же луч поляризован максимально, но не полностью.

При падении естественного света под углом Брюстера i_B отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B}, \quad n_{21} = \frac{\sin i_B}{\sin i_2}, \quad \cos i_B = \sin i_2,$$

Следовательно

$$i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ но } i'_B = i_B \text{ (закон отражения)},$$

поэтому

$$i'_B + i_2 = \frac{\pi}{2},$$

где n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой, i_2 – угол преломления.

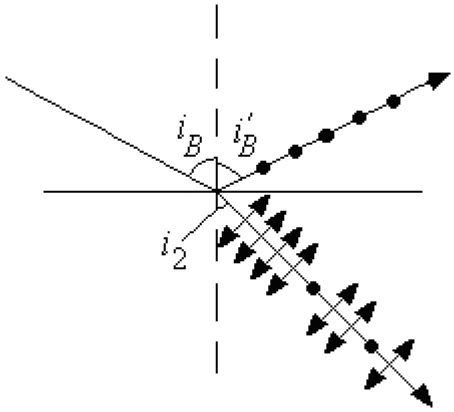


Рис. 5.3

Формула Френеля. При отражении естественного света от диэлектрического зеркала интенсивности световых колебаний в отраженном луче, совершающихся в направлениях, перпендикулярном к плоскости падения света $I_{\perp}$ и параллельном плоскости падения света $I_{\parallel}$ соответственно равны

$$I_{\perp} = 0{,}5\, I_0 \left(\frac{\sin(i-\beta)}{\sin(i+\beta)} \right)^2,$$

$$I_{\parallel} = 0{,}5\, I_0 \left(\frac{\mathrm{tg}(i-\beta)}{\mathrm{tg}(i+\beta)} \right)^2,$$

где I_0 – интенсивность падающего естественного света, i – угол падения света, β – угол преломления света.

Поляризация при двойном лучепреломлении. Двойное лучепреломление – способность анизотропных веществ расщеплять падающий световой луч на два луча, распространяющихся в разных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. При падении узкого светового пучка на достаточно толстый кристалл из него выходят два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу, – обыкновенный (o) и необыкновенный (e) (рис. 5.4).

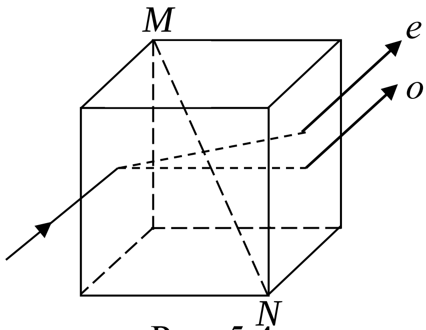


Рис. 5.4

На рис. 5.4 *MN* – *оптическая ось кристалла* (направление в оптически анизотропном кристалле, по которому распространяется луч света, не испытывая двойного лучепреломления).

Скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в двоякопреломляющем кристалле соответственно равны

$$\upsilon_o = \frac{c}{n_o},\ \upsilon_e = \frac{c}{n_e}.$$

Пластинка в четверть или в полволны – одноосного, двоякопреломляющего кристалла, вырезанная параллельно оптической оси, создает сдвиг по фазе между обыкновенным и необыкновенным лучами, проходящими перпендикулярно пластинке, на $\pm\pi/4$ или на $\pm\pi/2$ соответственно.

Толщина d таких пластинок удовлетворяет условию:

$$d = \left[\left(m \pm \frac{1}{4}\right)\lambda_0\right]\left(\left|n_o - n_e\right|\right)$$

или

$$d = \left[\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\lambda_0\right]\left(\left|n_o - n_e\right|\right),$$

где m = 0, 1, 2...; λ_0 – длина световой волны в вакууме.

Угол поворота φ плоскости поляризации монохроматического света при прохождении через оптически активное вещество:

а) для твердых тел $\varphi = \varphi_0 l$;

б) для чистых жидкостей $\varphi = \varphi_0 l\rho$;

в) для растворов $\varphi = \varphi_0 lC$, где φ_0 – удельное вращение, l – толщина оптически активного вещества, ρ – плотность жидкости, C – концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Задача 5.1. Определите во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, расположенный так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 30°$ и в каждом из них теряется 8 % падающего света.

Решение

$\alpha = 30°$
$k = 0{,}08$

$I_0 / I_2 - ?$

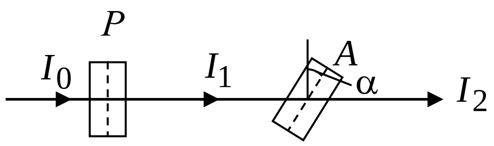


Рис. 5.2

Естественный свет, проходя через поляризатор P превращается в плоскополяризованный и его интенсивность на выходе из поляризатора (с учетом потери интенсивности)

$$I_1 = \frac{1}{2}(1-k)I_0. \tag{1}$$

По закону Малюса интенсивность света на выходе из анализатора в данном случае

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\alpha.$$

Подставив в данное выражение (1), получим

$$I_2 = \frac{1}{2}(1-k)^2\cos^2\alpha I_0.$$

Тогда искомое ослабление интенсивности при прохождении света через поляризатор и анализатор

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha} \approx 3.$$

Ответ: в 3 раза.

Задача 5.2. Найти угол i_B полной поляризации при отражении света от стекла (n = 1,57).

Решение

$n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}57$	При отражении света от диэлектрика с относительным показателем преломления $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$
$i_B - ?$	

получается световая волна, полностью поляризованная в плоскости падения (электрический вектор колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости падения), если угол падения i удовлетворяет условию (закон Брюстера):

$$\mathrm{tg}(i_B) = n_{21},$$

$$i_B = \mathrm{arctg}(n_{21}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 57^\circ.$$

Ответ: 57°.

Задача 5.3. Пучок плоскополяризованного света (λ = 589 нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_o и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$.

Решение

λ = 589 нм = 589·10^{-6} м $n_o = 1{,}66$ $n_e = 1{,}49$	Скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в двоякопреломляющем кристалле соответственно будут равны
$\lambda_o, \lambda_e - ?$	

$$\upsilon_o = \frac{c}{n_o} \text{ и } \upsilon_e = \frac{c}{n_e}.$$

Длины волн соответственно равны

$$\lambda_o = \upsilon_o T = \upsilon_o \frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{n_o} = 355 \text{ нм},$$

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = 395 \text{ нм.}$$

Ответ: $\lambda_o = 355$ нм, $\lambda_e = 395$ нм.

Задачи для самостоятельного решения

1. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора равен 45°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60°?

Ответ: в 2 раза

2. При прохождении света через слой 5 %-го сахарного раствора толщиной 15 см плоскость поляризации света повернулась на угол 6,5°. На сколько повернется плоскость поляризации в 13 %-ом растворе с толщиной слоя в 12 см?

Ответ: на 13,5°.

3. Луч света последовательно проходит через три николя (николь – это призма, используемая в качестве поляризатора, в котором используется явление двойного лучепреломления), плоскости пропускания которых образуют между собой углы $\alpha_{12} = 45^\circ$ и $\alpha_{23} = 30^\circ$. Полагая, что коэффициент поглощения каждого николя k = 0,15, найти, во сколько раз луч, выходящий из третьего николя, ослаблен по сравнению с лучом, падающим на первый николь.

Ответ: в 8,3 раза.

4. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд, и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i_B = 42°37'$. Найти показатель преломления n жидкости. Под каким углом i должен падать на дно сосуда луч света, идущий в этой жидкости, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Ответ: n = 1,63, i = 66,9°.

5. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим пучком. Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет полностью поляризован. Какая это жидкость?

Ответ: n = 1,33, жидкость – вода.

6. Определить степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 3 раза больше амплитуды, соответствующей его минимальной интенсивности.

Ответ: P = 0,8.

7. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых составляет α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через нее. Пренебрегая поглощением света, определить интенсивность I света после его обратного прохождения.

Ответ: $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \alpha$.

8. Пластинка кварца толщиной d_1 = 2 мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30^\circ$. Определить толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью.

Ответ: d_2 = 6 мм.

9. Определить наименьшую толщины кристаллической пластинки в четверть волны для λ = 530 нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0{,}01$.

Ответ: d = 13,3 м.

10. Определить массовую концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через трубку длиной l = 20 см с этим раствором плоскость поляризации света поворачивается на угол φ = 10°. Удельное вращение φ_0 сахара равно $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад $\cdot$ м^2/кг.

Ответ: C = 74,8 кг/м^3.

Занятие № 6

Тема: **Тепловое излучение**

Краткая теория

Электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счет его внутренней энергии, называется *тепловым* *излучением*. Тепловое излучение – это путь самопроизвольной передачи энергии в форме теплоты от более нагретого тела к менее нагретому. При этом происходит излучение или поглощение электромагнитных волн телами, участвующими в процессе передачи энергии.

Энергетической светимостью тела называется физическая величина $R_э$, численно равная энергии электромагнитных волн, излучаемых за единицу времени с единицы площади поверхности тела.

Излучательная способность тела (или спектральная плотность энергетической светимости) определяется, как

$$r_\nu = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\nu} \text{ или } r_\lambda = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\lambda};\ r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu,$$

где $dW_{\text{изл}}$ – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени с единицы площади поверхности тела в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ (или длин волн в вакууме от λ до $\lambda + d\lambda$).

Энергетическая светимость тела связана с r_ν и r_λ следующим соотношением:

$$R_э = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda.$$

Поглощательная способность тела выражается так:

$$a_\nu = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW}.$$

a_ν показывает, какая часть энергии dW падающего в единицу времени на единицу поверхности тела электромагнитного излучения с частотами от ν до $\nu + d\nu$ поглощается телом.

Абсолютно черным телом называется тело, которое полностью поглощает все падающее на него излучение независимо от направления падающего излучения, его спектрального состава и поляризации.

Серым телом называется тело, поглощающая способность которого меньше единицы и не зависит от частоты (длины волны) света, направления его распространения и поляризации

$$a_\nu^{\text{сер}} = a^{\text{сер}}.$$

Закон Кирхгофа утверждает, что отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от материала тела и равно излучательной способности абсолютно черного тела, которая является функцией только температуры и частоты, т.е.

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^\circ,$$

где r_ν° – излучательная способность абсолютно черного тела.

Закон Стефана-Больцмана определяет зависимость энергетической светимости абсолютно черного тела от его термодинамической температуры

$$R_э^\circ = \sigma T^4,$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана ($\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)), T – термодинамическая температура излучающего тела.

Для несерого тела

$$R_э = \alpha R_э^\circ,$$

где α – интегральная степень черноты тела, которая зависит от материала тела, состояния его поверхности и температуры. Для всех тел, кроме абсолютно черного, $\alpha < 1$.

Энергия излучения абсолютно черного тела распределяется неравномерно по его спектру. Тело почти не излучает в области очень малых и очень больших частот. При повышении температуры максимум r_λ° смещается в сторону меньших длин волн (бóльших частот) в соответствии с *первым законом Вина – законом смещения*:

$$\lambda_m = \frac{b_1}{T},$$

где $b_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина.

Второй закон Вина – максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела возрастает пропорционально пятой степени температуры:

$$r_{\lambda\,\max}^\circ = b_2 \cdot T^5,$$

где $b_2 = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5).

Примеры решения задач

Задача 6.1. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры (T = 600 К) $\alpha = 0{,}6$.

Решение

$\alpha = 0{,}6$ $T = 600$ К $R_э - ?$	Для серого тела

$$R_э = \alpha R_э^\circ \qquad (1)$$

где $R_э^\circ$ – энергетическая светимость абсолютно черного тела.

По закону Стефана-Больцмана:

$$R_э^\circ = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2)

$$R_э = \alpha\sigma T^4 = 0{,}6 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 600^4 = 4{,}6 \text{ кВт/м}^2.$$

Ответ: $R_э = 4{,}6$ кВт/м^2.

Задача 6.2. Какую энергетическую светимость $R_э^\circ$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 484$ нм?

Решение

$\lambda_m = 484$ нм $b_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К $R_э^\circ - ?$	Энергетическая светимость $R_э^\circ$ абсолютно черного тела определяется в зависимости от его термодинамической температуры T по закону Стефана-Больцмана:

$$R_э^\circ = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Из закона смещения Вина:

$$T = \frac{b_1}{\lambda_m}. \qquad (2)$$

Совместное решение выражений (1) и (2) дает:

$$R_э^\circ = \sigma\left(\frac{b_1}{\lambda_m}\right)^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{484 \cdot 10^{-9}}\right)^4 = 73{,}5 \text{ МВт/м}^2.$$

Ответ: $R_э^\circ = 73{,}5$ МВт/м^2.

Задача 6.3. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью 30 см^2 равна 1,3 кК. Принимая, что отверстие печи излучает, как черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность составляет 1,5 кВт.

Решение

Мощность излучения муфельной печи через отверстие площадью S равна:

$$P_{\text{изл}} = R_э^\circ \cdot S. \tag{1}$$

По закону Стефана-Больцмана

$$R_э^\circ = \sigma T^4. \tag{2}$$

Рассеиваемая мощность определится, как разность:

$$P_{\text{расс}} = P - P_{\text{изл}}. \tag{3}$$

Искомая величина будет получена из (3) с учетом (1) и (2):

$$\frac{P_{\text{расс}}}{P} = 1 - \frac{P_{\text{изл}}}{P} = 1 - \frac{\sigma T^4 S}{P} = 1 - \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 1300^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1500} = 0{,}676.$$

Ответ: $\dfrac{P_{\text{расс}}}{P} = 0{,}676$.

Задача 6.4. Диаметр спирали в электрической лампочке $d = 0{,}3$ мм, длина спирали $l = 5$ см. При включении лампочки в сеть напряжением $U = 127$ В через лампочку течет ток $I = 0{,}31$ А. Найти температуру спирали. Считать, что при установившемся равновесии все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетической светимости вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры $\alpha = 0{,}31$.

Решение

$d = 0{,}3$ мм $l = 5$ см $U = 127$ В $I = 0{,}31$ А $\alpha = 0{,}31$	Мощность теплового излучения спирали определяется, как
T – ?	

$$P_{\text{изл}} = \alpha \cdot R_э^\circ \cdot S\,, \qquad (1)$$

где $R_э^\circ$ – энергетическая светимость черного тела, S – площадь излучающей поверхности спирали:

$$S = \pi d l\,. \qquad (2)$$

По закону Стефана-Больцмана:

$$R_э^\circ = \sigma T^4\,. \qquad (3)$$

Из условия задачи вся мощность излучения равна:

$$P_{\text{изл}} = I \cdot U\,. \qquad (4)$$

Объединив выражения (1) ÷ (4), получим:

$$IU = \alpha\sigma T^4 \pi d l\,,$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{IU}{\alpha\sigma\pi d l}} = \sqrt{\frac{0{,}31 \cdot 127}{0{,}31 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}} = 2600 \text{ К}.$$

Ответ: $T = 2600$ К.

Задача 6.5. Внутри солнечной системы на таком же расстоянии R от Солнца, как и Земля, находится частица сферической формы, обладающая свойствами серого тела. Принимая, что Солнце излучает, как абсолютно черное тело с температурой $T_с = 6000$ К, определить температуру T частицы, считая, что она одинакова во всех точках частицы.

Решение

$R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м $R_c = 6{,}95 \cdot 10^8$ м $T_c = 6000$ К	Мощность излучения Солнца равна:
T – ?	

$$P_{\text{изл}_\text{с}} = \sigma T_\text{с}^4 \cdot S_\text{с}\,, \qquad (1)$$

где $S_\text{с} = 4\pi R_\text{с}^2$ – площадь излучающей поверхности Солнца.

Мощность излучения, которое дойдет до единицы поверхности сферы радиуса *R*, окружающей Солнце

$$P_{\text{изл}} = \frac{P_{\text{изл}_\text{с}}}{S}, \qquad (2)$$

где $S = 4\pi R^2$.

Совместное рассмотрение (1) и (2) дает:

$$P_{\text{изл}} = \sigma T_\text{с}^4 \frac{R_\text{с}^2}{R^2}, \qquad (3)$$

Мощность излучения Солнца, поглощаемая частицей:

$$P_1 = a\frac{\pi d^2}{4} P_{\text{изл}} = a\frac{\pi d^2}{4}\sigma T_\text{с}^4 \frac{R_\text{с}^2}{R^2}. \qquad (4)$$

Мощность излучения частицы по всем направлениям равна:

$$P_2 = a\pi d^2 \sigma T^4, \qquad (5)$$

где πd^2 – площадь излучающей поверхности частицы.

При термодинамическом равновесии $P_1 = P_2$, тогда из (4) и (5) получим

$$T = T_\text{с}\sqrt{\frac{R_\text{с}}{2R}} = 6000\sqrt{\frac{6{,}95\cdot 10^8}{2\cdot 1{,}49\cdot 10^{11}}} = 290 \text{ К}.$$

Ответ: T = 290 К.

Задача 6.6. В результате нагревания черного тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{1m} = 2{,}7$ мкм до $\lambda_{2m} = 0{,}9$ мкм. Определить, во сколько раз увеличились энергетическая светимость тела $R_э^\circ$ и максимальная плотность энергетической светимости $r_{\lambda\,\max}^\circ$.

Решение

Дано	
λ_{1m} = 2,7 мкм	
λ_{2m} = 0,9 мкм	
$\dfrac{R_{э_2}^\circ}{R_{э_1}^\circ}$ - ? $\dfrac{r_{\lambda\,\max_2}^\circ}{r_{\lambda\,\max_1}^\circ}$ - ?	

По закону Стефана-Больцмана:

$$R_э^\circ = \sigma T^4. \qquad (1)$$

По закону смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b_1}{T}, \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получим

$$\frac{R^\circ_{э_2}}{R^\circ_{э_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m}}\right)^4 = \left(\frac{2{,}7\cdot 10^{-6}}{0{,}9\cdot 10^{-6}}\right)^4 = 81.$$

Второй закон Вина утверждает, что

$$r^\circ_{\lambda\,\max} = b_2 T^5. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\frac{r^\circ_{\lambda\,\max_2}}{r^\circ_{\lambda\,\max_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^5 = \left(\frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m}}\right)^5 = \left(\frac{2{,}7\cdot 10^{-6}}{0{,}9\cdot 10^{-6}}\right)^5 = 243.$$

Ответ: $\dfrac{R^\circ_{э_2}}{R^\circ_{э_1}} = 81$, $\dfrac{r^\circ_{\lambda\,\max_2}}{r^\circ_{\lambda\,\max_1}} = 243$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1$ см^2 имеет мощность $P = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: $T = 1000$ К.

2. Какую мощность излучения Р имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К.

Ответ: $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

3. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры $\alpha = 0{,}6$.

Ответ: $R_э = 4{,}6$ кВт/м^2.

4. Мощность излучения абсолютно черного тела $P = 34$ кВт. Найти температуру Т этого тела, если известно, что его поверхность $S = 0{,}6$ м^2.

Ответ: $T = 1000$ К.

5. Мощность излучения раскаленной металлической поверхности P_1 = 0,67 кВт. Температура поверхности T = 2500 К, ее площадь S = 10 см^2. Какую мощность излучения P имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной? Найти отношение α энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Ответ: P = 2,22 кВт, α = 0,3.

6. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке d = 0,3 мм, длина спирали l = 5 см. При включении лампочки в сеть напряжением U = 127 В через лампочку течет ток I = 0,31 А. Найти температуру T спирали. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры α = 0,31.

Ответ: T = 2500 К.

7. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке T = 2450 К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре α = 0,3. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.

Ответ: S = 0,4 см^2.

8. Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током I = 1 А до температуры 1000 К. При какой силе тока нить накалится до температуры 3000 К? При расчете пренебречь потерями энергии вследствие теплопроводности подвесов нити и обратным излучением окружающих тел.

Ответ: I_1 = 8 А.

9. Вольфрамовая нить диаметром 0,1 мм соединена последовательно с другой вольфрамовой нитью. Нити накаливаются в вакууме током, причем первая нить имеет температуру 2000 К, а вторая – 3000 К. Каков диаметр второй нити?

Ответ: d = 0,063 мм.

10. Найти солнечную постоянную K, т.е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: K = 1,37 кВт/м^2.

11. Считая, что атмосфера поглощает 10 % лучистой энергии, посылаемой Солнцем, найти мощность излучения P, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью $S = 0{,}5$ га. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: $P = 3{,}1$ МВт.

12. Температура поверхности Солнца 6000 К, отношение диаметра земной орбиты к диаметру Солнца составляет $2{,}14 \cdot 10^2$. Считая, что Земля одинаково излучает по всем направлениям, вычислите ее среднюю температуру.

Ответ: $T = 290$ К.

13. Какую мощность излучения P имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К.

Ответ: $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

14. Какую энергетическую светимость $R_э^\circ$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 484$ нм?

Ответ: $R_э^\circ = 73{,}5$ МВт/м^2.

15. Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, $\lambda_m = 700$ нм. Определить температуру тела, а также максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda\,\max}^\circ$ для этой длины волны.

Ответ: $T = 4140$ К, $r_{\lambda\,\max}^\circ = 1{,}57 \cdot 10^{12}$ Вт/м^2.

16. Определить площадь излучающей поверхности абсолютно черного тела, если поток излучения приходится на длину волны $\lambda_m = 500$ нм.

Ответ: $S = 1{,}56 \cdot 10^{-4}$ м^2.

17. Мощность излучения абсолютно черного тела $P = 10$ кВт. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 700$ нм.

Ответ: $S = 6$ см^2.

18. Зачерненный шарик остывает от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 293$ К. На сколько изменилась длина волны λ_m, соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости?

Ответ: $\Delta\lambda_m = 0{,}24$ мкм.

19. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $r^\circ_{\lambda\,\max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda_m = 400$ нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2.

Ответ: $T_1 = 3625$ К, $T_2 = 7250$ К.

20. Поверхность тела нагрета до температуры $T = 1000$ К. Затем одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T_1 = 100$ К, другая охлаждается на $\Delta T_2 = 100$ К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость $R_э$ поверхности этого тела?

Ответ: Увеличится в 1,06 раз.

Занятие № 7

Тема: **Фотоны. Фотоэффект**

Краткая теория

Свет представляет собой сложное явление, сочетающее в себе свойства электромагнитной волны и потока частиц. Световая частица называется фотоном. Фотон несет квант энергии, определяемый как

$$\varepsilon_ф = h\nu = \hbar\omega = h \cdot \frac{c}{\lambda},$$

где ν – частота света, c – скорость света в вакууме, h – постоянная Планка ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с), $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, λ – длина волны, $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Фотон – это частица, которая всегда и в любой среде движется со скоростью света c и имеет массу покоя, равную нулю. Масса фотона определяется из соотношения $\varepsilon_0 = m_ф \cdot c^2$, т.е.

$$m_ф = \frac{\varepsilon_0}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}.$$

Фотон обладает импульсом, определяемым как

$$p_{\text{ф}} = m_{\text{ф}} \cdot c = \frac{h}{\lambda} = \hbar k = \frac{\varepsilon_0}{c}.$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Фотон летит в направлении распространения электромагнитной волны, поэтому направления вектора $\vec{p}_{\text{ф}}$ и волнового вектора $\vec{k}$ совпадают, т.е.

$$\vec{p}_{\text{ф}} = \hbar\vec{k}.$$

Внешним фотоэффектом называется явление испускания электронов твердыми и жидкими телами под действием света. Закономерности фотоэффекта объясняются тем, что свет излучается и поглощается квантами. Часть кванта энергии $h\nu$, воспринимаемого электроном вещества, затрачивается на то, чтобы электрон мог покинуть тело. Эта часть энергии называется работой выхода $A_{\text{вых}}$, величина которой зависит от состава вещества.

Остаток энергии образует кинетическую энергию $E_{\text{к}}$ электрона, покинувшего вещество.

Эти соотношения описывает *уравнение Эйнштейна*

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{к}},$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность вещества, $A_{\text{вых}}$ – работа выхода электрона фотоэлектрона, $E_{\text{к}} = \dfrac{m_e \upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия фотоэлектрона.

Из уравнения Эйнштейна следует, что если работа выхода превышает энергию фотона, электроны не смогут покинуть вещество. Следовательно, для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия $h\nu \geq A_{\text{вых}}$ или

$$\nu \geq \nu_0 = \frac{A_{\text{вых}}}{h}.$$

Соответственно, для длины волны получается условие:

$$\lambda \geq \lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}.$$

Частота ν_0 или длина волны λ_0 называется *красной границей фотоэффекта*.

На основе фотоэффекта работают фотодиоды, в которых электрический ток представляет собой поток электронов, выбитых светом из катода и летящих к аноду. Чтобы фототок стал равным нулю, между катодом и анодом необходимо приложить *задерживающее напряжение* $U_{\text{зад}}$, при котором ни один из фотоэлектронов, даже обладая при вылете из катода максимальной скоростью $\upsilon_{\max}$, не сможет достигнуть анода. Следовательно:

$$\frac{m_e \upsilon_{\max}^2}{2} = eU_{\text{зад}},$$

где e – заряд электрона, m_e – масса электрона.

Примеры решения задач

Задача 7.1. Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 9{,}8$ В.

Решение

Дано	
$U = 9{,}8$ В	
$p_e = p_{\text{ф}}$	
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
$\lambda - ?$	

Пройдя разность потенциалов U, электрон приобретает энергию eU, т.е.

$$\frac{m_e \upsilon^2}{2} = eU \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Импульс электрона

$$p_e = m_e \upsilon = \sqrt{2 m_e e U}. \quad (1)$$

Импульс фотона

$$p_{\text{ф}} = \frac{h}{\lambda}. \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получим:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e U}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}8}} = 392 \text{ пм}.$$

Ответ: λ = 392 пм.

Задача 7.2. Фотоны с энергией $W_{max} = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A_{вых}$ =4,5 эВ. Найти максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла в результате фотоэффекта.

Решение

W_{max} = 4,9 эВ $A_{вых}$ =4,5 эВ p_{max} – ?	Импульс, передаваемый поверхности, равен сумме импульсов фотона, поглощаемого поверхностью, и вылетающего электрона, т.е.

$$p_{max} = p_ф + p_e. \tag{1}$$

Импульс фотона

$$p_ф = \frac{W_{max}}{c}. \tag{2}$$

Импульс электрона $p_e = m_e \upsilon_{max}$. Из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = W_{max} = A_{вых} + \frac{m_e \upsilon_{max}^2}{2}$$

вычислим

$$p_e = m_e \sqrt{\frac{2(W_{max} - A_{вых})}{m_e}} = \sqrt{2m_e(W_{max} - A_{вых})}. \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1) и получим

$$p_{max} = \frac{W_{max}}{c} + \sqrt{2m_e(W_{max} - A_{вых})}.$$

Учтем, что 1 эВ = 1,6 · 10^{-19} Дж.

$$p_{max} = \frac{4{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} + \sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}(4{,}9 - 4{,}5) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$$

$$= 3{,}45 \cdot 10^{-25} \left(кг \cdot \frac{м}{с}\right).$$

Ответ: $p_{max} = 3{,}45 \cdot 10^{-25} \left(кг \cdot \frac{м}{с}\right)$.

Задача 7.3. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти работу выхода $A_{вых}$ электрона из металла, максимальную скорость υ_{max} электронов, вырванных из металла светом с длиной волны λ = 180 нм, и максимальную энергию W_{max} электронов.

Решение

Дано	
λ_0 = 275 нм λ = 180 нм	Длина волны λ_0 красной границы фотоэффекта определяется как
$A_{вых}$ – ? υ_{max} – ? W_{max} – ?	$$\lambda_0 = hc / A_{вых} \Rightarrow A_{вых} = hc / \lambda_0 \Rightarrow$$

$$A_{вых} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{275 \cdot 10^{-9}} = 7{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4{,}5 \text{ эВ}.$$

Из уравнения Эйнштейна:

$$W_{max} = h\nu - A_{вых} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - A_{вых} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{180 \cdot 10^{-9}} - 7{,}2 \cdot 10^{-19} =$$

$$= 3{,}8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2{,}4 \text{ эВ}.$$

Максимальная скорость электрона будет равна

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2W_{max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 9{,}1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Ответ: $A_{вых}$ = 4,5 эВ, W_{max} = 2,4 эВ, υ_{max} = 9,1 · 10^5 м/с.

Задача 7.4. Поток монохроматического излучения (λ = 0,46 мкм) падает на металлическую пластину. Фототок полностью прекращается, когда задерживающая разность потенциалов достигает 0,7 В. Найти работу выхода $A_{вых}$ и красную границу фотоэффекта λ_0.

Решение

Дано	
λ = 0,46 мкм $U_{зад}$ = 0,7 В	Значение задерживающей разности потенциалов $U_{зад}$ позволяет определить максимальную
$A_{вых}$ – ? λ_0 – ?	кинетическую энергию фотоэлектронов:

$$W_{\max} = eU_{\text{зад}}. \qquad (1)$$

Работу выхода можно найти из уравнения Эйнштейна:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_{\max}. \qquad (2)$$

Объединив (1) и (2) и учитывая, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, получим

$$A_{\text{вых}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - eU_{\text{зад}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0{,}46 \cdot 10^{-6}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}7 =$$

$$= 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2 \text{ эВ}.$$

Красная граница фотоэффекта определяется как:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}} = 0{,}62 \text{ мкм}.$$

Ответ: $A_{\text{вых}} = 2$ эВ, $\lambda_0 = 0{,}62$ мкм.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти энергию, массу и импульс фотона, если соответствующая длина волны $\lambda = 1{,}6$ пм.

Ответ: $\varepsilon_{\text{ф}} = 1{,}24 \cdot 10^{-13}$ Дж, $m_{\text{ф}} = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ кг, $p_{\text{ф}} = 4{,}1 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

2. Найти массу фотона: а) красных лучей света ($\lambda = 700$ нм); б) рентгеновских лучей ($\lambda = 25$ пм); в) гамма-лучей ($\lambda = 1{,}24$ пм).

Ответ: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг, б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг, в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

3. С какой скоростью υ должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Ответ: $\upsilon = 1{,}4$ км/с.

4. Какую энергию должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

Ответ: $\varepsilon_{\text{ф}} = 0{,}51$ МэВ.

5. Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.

Ответ: $\lambda_{01} = 517$ нм, $\lambda_{02} = 540$ нм, $\lambda_{03} = 620$ нм, $\lambda_{04} = 660$ нм.

6. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти минимальную энергию $\varepsilon_ф$ фотона, вызывающего фотоэффект.

Ответ: $\varepsilon_ф = 4{,}5$ эВ.

7. Найти задерживающую разность потенциалов $U_{зад}$ для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Ответ: $U_{зад} = 1{,}75$ В.

8. Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц – разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Ответ: $h = 6{,}6\ 10^{-34}$ Дж · с.

9. Вакуумный фотоэлемент состоит из центрального катода (вольфрамового шарика) и анода (внутренней поверхности посеребренной изнутри колбы). Контактная разность потенциалов между электродами $U_0 = 0{,}6$ В ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом с длиной волны $\lambda = 230$ нм. Какую задерживающую разность потенциалов $U_{зад}$ надо приложить между электродами, чтобы фототок упал до нуля? Какую скорость υ получат электроны, когда они долетят до анода, если не прикладывать между катодом и анодом разности потенциалов?

Ответ: $U_{зад} = 1{,}5$ В, $\upsilon = 7{,}3 \cdot 10^5$ м/с.

10. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 307$ нм, а максимальная кинетическая энергия W_{max} фотоэлектрона равна 1 эВ?

Ответ: 0,8.

11. На поверхность лития падает монохроматический свет ($\lambda = 310$ нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_{зад}$ не менее 1,7 В. Определить работу выхода $A_{вых}$.

Ответ: $A_{вых} = 2{,}3$ эВ.

12. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_1 = 3{,}7$ В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность

потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу выхода $A_{вых}$ электронов с поверхности этой пластинки.

Ответ: $A_{вых} = 4$ эВ.

13. На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов.

Ответ: $\upsilon_{max} = 760$ км/с.

14. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10 Мм/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

Ответ: $\lambda = 4{,}36$ нм.

15. Красная граница фотоэффекта у лития 520 нм. Какую обратную разность потенциалов (задерживающее напряжение) нужно приложить к фотоэлементу (к фотокатоду подключается плюс, к аноду – коллектору – минус источника напряжения), чтобы задержать электроны, испускаемые литием под действием ультрафиолетового излучения, длина волны которого 220 нм.

Ответ: $U_{зад} = 3{,}8$ В.

Занятие № 8

Тема: **Эффект Комптона**

Краткая теория

Эффектом Комптона называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения на свободных или слабосвязанных электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Эффект Комптона может быть объяснен на основе квантовых представлений о природе света – он является результатом упругого столкновения фотонов света со свободными электронами. При этом отразившиеся (или рассеянные) фотоны теряют часть энергии, что означает уменьшение частоты (увеличение длины волны) рассеянного излучения. Этот результат не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны не должна изменяться при рассеянии.

Эффект Комптона может наблюдаться лишь в высокочастотной части электромагнитного излучения (рентгеновского и γ-излучения), так как энергия налетающего фотона должна значительно превышать энергию связи электрона с атомом. В видимой области спектра эффект не наблюдается.

Длина волны рассеянного излучения не зависит от длины волны падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны падающего излучения, λ' – длина волны рассеянного излучения, θ – угол рассеяния, λ_c – комптоновская длина волны:

$$\left(\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}\right),$$

где m_0 – масса частицы, на которой происходит рассеяние, для электрона λ_c = 2,426 пм.

В составе рассеянного излучения присутствует и излучение первоначальной длины волны λ. Это объясняется тем, что налетающие фотоны сталкиваются не только со свободными или слабосвязанными электронами. Если электрон сильно связан с атомом, то фотон при соударении обменивается энергией и с атомом в целом. Поскольку масса атома на несколько порядков больше массы электрона, то атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона. Поэтому рассеянное излучение в этом случае практически не изменяет длину волны по сравнению с падающим.

Примеры решения задач

Задача 8.1. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0,75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60°$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить: а) энергию $\varepsilon'_ф$ рассеянного фотона, б) кинетическую энергию W электрона отдачи, в) направление движения электрона отдачи.

Решение

$\varepsilon_ф$ = 0,75 МэВ
$\theta = 60°$
$m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг
$\varepsilon'_ф$ – ? W – ? φ – ?

а) Энергия фотона

$$\varepsilon_ф = h\nu = hc/\lambda \Rightarrow \lambda = hc/\varepsilon_ф.$$

Аналогично

$$\lambda' = hc/\varepsilon'_ф.$$

Подставим эти выражения в формулу Комптона:

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{hc}{\varepsilon'_ф} - \frac{hc}{\varepsilon_ф} = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon'_ф} - \frac{1}{\varepsilon_ф} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0 c^2} \Rightarrow \varepsilon'_ф = \left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0 c^2} + \frac{1}{\varepsilon_ф}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\varepsilon'_ф = \left(\frac{2\cdot 0{,}25}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}} + \frac{1}{0{,}75\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}}\right)^{-1} = 6{,}9\cdot 10^{12}\ \text{Дж} = 0{,}43\ \text{МэВ}.$$

б) Кинетическая энергия электрона отдачи равна

$$W = \varepsilon_ф - \varepsilon'_ф = 0{,}75 - 0{,}43 = 0{,}32\ \text{МэВ}$$

в) По закону сохранения импульса импульс налетающего фотона $\vec{p}_ф$ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона $\vec{p}\,'_ф$ и электрона отдачи $m_0\vec{\upsilon}$ (рис. 8.1):

$$\vec{p}_ф = \vec{p}\,'_ф + m_0\vec{\upsilon}.$$

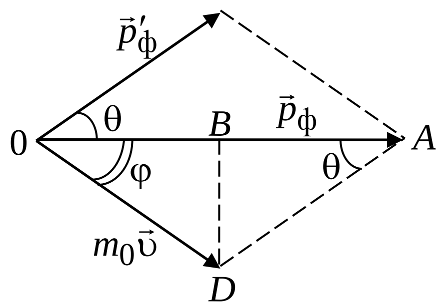


Рис. 8.1

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BD}{BO} = \frac{AD\sin\theta}{OA - AD\cos\theta}. \qquad (1)$$

Отметим, что $AD = p'_ф$, а $OA = p_ф$, следовательно:

$$tg\varphi = \frac{p'_ф \sin\theta}{p_ф - p'_ф \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\dfrac{p_ф}{p'_ф} - \cos\theta}. \qquad (2)$$

Учитывая, что $p_ф = \dfrac{\varepsilon_ф}{c}$ и $p'_ф = \dfrac{\varepsilon'_ф}{c}$, получим

$$tg\varphi = \frac{\sin\theta}{\dfrac{\varepsilon_ф}{\varepsilon'_ф} - \cos\theta} = \frac{0{,}867}{\dfrac{0{,}75}{0{,}43} - 0{,}5} = 0{,}697,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}0{,}697 = 35^\circ$$

Ответ: $\varepsilon'_ф = 0{,}43$ МэВ, $W = 0{,}32$ МэВ, $\varphi = 35^\circ$.

Задача 8.2. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90^\circ$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon'_ф$ равна 0,4 МэВ. Определить энергию $\varepsilon_ф$ фотона до рассеяния.

Решение

Дано
$\theta = 90^\circ$
$\varepsilon'_ф = 0{,}4$ МэВ
$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$\varepsilon_ф - ?$

Энергия падающего фотона

$$\varepsilon_ф = h\nu = hc/\lambda. \qquad (1)$$

Аналогично для рассеянного фотона

$$\varepsilon'_ф = hc/\lambda'. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) выразим λ и λ'

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon_ф}, \qquad \lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'_ф}. \qquad (3)$$

Подставим эти соотношения в формулу Комптона

$$\frac{hc}{\varepsilon'_ф} - \frac{hc}{\varepsilon_ф} = 2\lambda c \sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (4)$$

С учетом $\lambda_c = \dfrac{h}{m_0 c}$ получим

$$\frac{1}{\varepsilon'_{\text{ф}}}-\frac{1}{\varepsilon_{\text{ф}}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0c^2}\Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\text{ф}}=\left(\frac{1}{\varepsilon'_{\text{ф}}}-\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0c^2}\right)^{-1}\Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\text{ф}}=\left(\frac{1}{0{,}4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}}-\frac{2\cdot 0{,}5}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{8}}\right)^{-1}=2{,}93\cdot 10^{-13}\text{ Дж}=1{,}85\text{ МэВ},$$

Ответ. $\varepsilon_{\text{ф}}=1{,}85$ МэВ.

Задача 8.3. Рентгеновский фотон с частотой $7{,}5\cdot 10^{18}$ Гц испытывает рассеяние на 90° на свободном электроне. Определить частоту фотона после столкновения, импульс и энергию электрона отдачи.

Решение

$\nu=7{,}5\cdot 10^{18}$ Гц
$\theta=90°$
$m_0=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг
$\nu'-?$ $p-?$ $W_{\text{э}}-?$

Длина волны λ и частота ν излучения связаны выражением

$$\lambda=c/\nu. \tag{1}$$

Используем соотношение (1) в формуле Комптона

$$\lambda'-\lambda=2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{c}{\nu'}-\frac{c}{\nu}=2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow\frac{1}{\nu'}-\frac{1}{\nu}=2\frac{h}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Откуда следует

$$\nu'=\left(2\frac{h}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\nu}\right)^{-1}\Rightarrow$$

$$\nu' = \left(2\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}5}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} + \frac{1}{7{,}5 \cdot 10^{18}} \right)^{-1} = 7{,}07 \cdot 10^{18} \text{ Гц.}$$

Из закона сохранения импульса можно записать

$$\vec{p}_ф = \vec{p}\,'_ф + \vec{p}\,, \qquad (2)$$

где $p_ф = \dfrac{h\nu}{c}$ – импульс налетающего фотона, $p'_ф = \dfrac{h\nu'}{c}$ – импульс рассеянного фотона, p – импульс электрона отдачи.

Выражение (2) отображается графически с учетом $\theta = 90^\circ$.

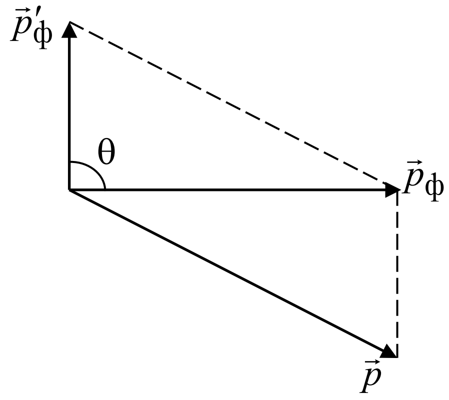


Рис. 8.2

Из рис. 8.2 можно записать:

$$p = \sqrt{p_ф^2 + \left(p'_ф\right)^2} = \frac{h}{c}\sqrt{\nu^2 + (\nu')^2} =$$

$$= \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8}\sqrt{7{,}5^2 + 7{,}07^2} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{-23} \text{ (кг · м/с).}$$

Энергия электрона отдачи определится так

$$W = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{4 \cdot 10^{-46}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 0{,}22 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

Ответ. $\nu' = 7{,}07 \cdot 10^{18}$ Гц, р = $2 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, $W = 0{,}22 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Задача 8.4. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 1{,}025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить угол рассеяния θ фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны $\lambda_c = 2{,}43$ пм.

Решение

$\varepsilon_ф = 1{,}025$ МэВ	Из соотношения
$\lambda' = \lambda_c = 2{,}43$ пм	
$\theta - ?$	

$$\varepsilon_ф = h\nu = hc/\lambda \Rightarrow \lambda = hc/\varepsilon_ф \qquad (1)$$

Преобразуем формулу Комптона с помощью (1):

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) \Rightarrow \lambda_c - \frac{hc}{\varepsilon_ф} = \lambda_c(1-\cos\theta) \qquad (2)$$

Из выражения (2) $\cos\theta = \dfrac{hc}{\varepsilon_ф \cdot \lambda_c} \Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}025\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}\cdot 2{,}43\cdot 10^{-12}} = 0{,}498 \approx 0{,}5.$$

$$\theta = \arccos 0{,}5 = 60^\circ.$$

Ответ. $\theta = 60^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом $\theta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной 57 пм.

Ответ: λ = 55,8 пм.

2. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказывается, что длины волн рассеянного под углами $\theta_1 = 60^\circ$ и $\theta_2 = 120^\circ$ излучения отличаются в 1,5 раза. Определить длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

Ответ: λ = 3,64 пм.

3. Фотон с длиной волны λ = 5 пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить: 1) изменение длины волны при рассеянии, 2) энергию электрона отдачи, 3) импульс электрона отдачи.

Ответ: 1) $\Delta\lambda = 2{,}43$ пм; 2) $W_э = 81{,}3$ кэВ; 3) $p_э = 1{,}6\cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

4. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию

электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20 %.

Ответ: $W_э = 41{,}7$ кэВ.

5. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}3$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 180^\circ$ на свободном электроне. Определить долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный фотон.

Ответ: $\varepsilon'_ф / \varepsilon_ф = 0{,}461$.

6. Фотон с энергией 100 кэВ в результате комптоновского эффекта рассеялся при соударении со свободным электроном на угол $\theta = \pi/2$. Определить энергию фотона после рассеяния.

Ответ: $\varepsilon'_ф = 83{,}7$ кэВ.

7. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найти энергию $\varepsilon'_ф$ и импульс $p'_ф$ рассеянного фотона.

Ответ: $\varepsilon'_ф = 2{,}6 \cdot 10^5$ эВ, $p'_ф = 13{,}6 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

8. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны при рассеянии, а также энергию $W_э$ и импульс $p_э$ электрона отдачи.

Ответ: $\Delta\lambda = 2{,}4$ пм, $W_э = 6{,}66$ кэВ, $p_э = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

9. На сколько изменяется длина волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии под углом $\theta = 60^\circ$?

Ответ: $\Delta\lambda = 1{,}21$ пм.

10. Найти длину волны рентгеновских лучей ($\lambda = 20$ пм) после комптоновского рассеяния под углом 90°.

Ответ: $\lambda' = 22{,}43$ пм.

11. При облучении графита рентгеновскими лучами длина волны излучения, рассеянного под углом 45°, оказалось равной 10,7 пм. Какова длина волны падающих лучей?

Ответ: $\lambda = 10$ пм.

12. Рентгеновский фотон с энергией $\varepsilon_ф$, равной удвоенному значению энергии покоя электрона, был рассеян на свободном электроне на угол $\theta = 120^\circ$. Определить энергию рассеянного фотона $\varepsilon'_ф$ и кинетическую энергию электрона отдачи $W_э$.

Ответ: $\varepsilon'_ф = 0{,}255$ МэВ, $W_э = 0{,}766$ МэВ.

13. Длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния увеличилась с 2 до 2,4 пм. Найти энергию электронов отдачи.

Ответ: $W_э = 0{,}1$ МэВ.

14. Угол рассеяния рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 5$ пм равен $\theta = 30^\circ$, а электроны отдачи движутся под углом $\varphi = 60^\circ$ к направлению падающих лучей. Найти: 1) импульс электронов отдачи $p_э$, 2) импульс фотонов рассеянных лучей $p'_ф$.

Ответ: $p_э = 6{,}63 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, $p'_ф = 1{,}14 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

15. Определить максимальное изменение длины волны при рассеянии света на протонах ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг).

Ответ: $\Delta\lambda_{max} = 2{,}64 \cdot 10^{-15}$ м.

16. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}25$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия $\varepsilon'_ф$ рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния θ.

Ответ: $\theta = 60^\circ 40'$ или $299^\circ 20'$.

17. Угол рассеяния фотона $\theta = 90^\circ$. Угол отдачи электрона $\varphi = 30^\circ$. Определить энергию $\varepsilon_ф$ падающего фотона.

Ответ: $\varepsilon_ф = 0{,}37$ МэВ.

18. Фотон ($\lambda = 1$ пм) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

Ответ: 70 %.

19. При эффекте Комптона γ-квант с энергией $\varepsilon_ф = 1{,}533$ МэВ был рассеян на некоторый угол θ. Найти угол рассеяния γ-кванта, если кинетическая энергия электрона отдачи оказалась равной $W_э = 0{,}511$ МэВ.

Ответ: $\theta = 80{,}8^\circ$.

Занятие № 9

Тема: **Волны де-Бройля**

Краткая теория

Корпускулярно-волновая двойственность свойств характерна не только для света, она проявляется для всех частиц, обладающих импульсом. Эта идея принадлежит французскому физику Луи де-Бройлю, поэтому волны, которые сопровождают движение любой материальной частицы, носят название волн де-Бройля. Природа этих волн не электромагнитная.

Формула де-Бройля устанавливает зависимость длины волны, связанной с движущейся материальной частицей, от ее импульса p.

$$\lambda = h/p = h/(m\upsilon),$$

где m – масса частицы, υ – скорость частицы, h – постоянная Планка.

Если частица релятивистская, т.е. ее скорость υ сравнима со скоростью света в вакууме c, то импульс частицы определяется, как

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

где m_0 – масса покоя частицы.

Соответственно изменяется формула де-Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}.$$

Волны де-Бройля, как и любые волны, характеризуются волновым числом, т.е. числом длин волн, укладывающимся на 2π единицах длины:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Объединив это выражение с формулой де-Бройля, получим еще один ее вид:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k},$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор, модуль его равен волновому числу k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{p}$.

Длина волны де-Бройля для частицы с массой m, имеющей кинетическую энергию $W_к$, определяется из соотношения

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}}.$$

Для релятивистской частицы связь между кинетической энергией частицы $W_к$, определяется из уравнения

$$p^2c^2 = W_к(W_к + 2m_0c^2) \Rightarrow$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}.$$

У макроскопических тел волновые свойства не проявляются, так как масса их значительна и величина длины волны де-Бройля λ пренебрежимо мала.

Кроме формулы де-Бройля в квантовой механике принимается, что связь энергии частицы W с частотой ее волны де-Бройля ν имеет вид, аналогичный кванту энергии

$$W = h\nu = \hbar\omega,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Волны де-Бройля имеют специфическую природу, не имеющую аналогии в классической физике. Это так называемые вероятностные волны – квадрат модуля амплитуды волны де-Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица будет обнаружена в этой точке.

Примеры решения задач

Задача 9.1. Найти длину волны де-Бройля λ для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) $W_к$ = 100 эВ, 2) $W_к$ = 3,0 МэВ.

Решение

Дано	
1) $W_к$ = 100 эВ 2) $W_к$ = 3 МэВ	Для определения того, является или нет электрон релятивистской частицей, необходимо сравнить его энергию с энергией его покоя $E_0 = m_0c^2$
λ_1 – ? λ_2 – ?	

$$E_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot 9\cdot10^{16} = 81{,}9\cdot10^{-15}\ \text{Дж} = 0{,}512\ \text{МэВ}.$$

1) 100 эВ << 512000 эВ, т.е. в данном случае электрон является классической частицей, поэтому его импульс $p = \sqrt{2mW_к}$. Из формулы де-Бройля следует

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}} = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot100\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}} = 1{,}23\cdot10^{-10}\ \text{м} = 1{,}23\ \mathring{A}.$$

2) 3 МэВ > 0,512 МэВ, поэтому в этом случае электрон надо считать релятивистской частицей, т.е. его импульс

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)},$$

откуда следует, что

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}(3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} + 2 \cdot 0{,}512 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19})}} =$$

$$= 0{,}62 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0{,}62 \ \overset{\circ}{A}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}23 \ \overset{\circ}{A}$, $\lambda_2 = 0{,}62 \ \overset{\circ}{A}$.

Задача 9.2. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов U = 500 В, имеет длину волны де-Бройля λ = 1,282 пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить ее массу.

Решение

Дано	
U = 500 В	
λ = 1,282 пм	
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
m – ?	

Частица с зарядом е, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, получает кинетическую энергию

$$W_к = eU \qquad (1)$$

Из выражения (1) определяется импульс частицы

$$p = \sqrt{2mW_к} = \sqrt{2meU}. \qquad (2)$$

С учетом (2) формула де-Бройля запишется так:

$$\lambda = h/p = \frac{h}{\sqrt{2meU}},$$

откуда

$$m = \frac{h^2}{2e\lambda^2 U} \Rightarrow$$

$$m = \frac{6{,}62^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}282^2 \cdot 10^{-24} \cdot 500} = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Ответ: $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 9.3. Определить длину волны де-Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите.

Решение

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $n = 3$	Электрон в атоме водорода движется по орбите под действием кулоновской силы взаимодействия с ядром
$\lambda - ?$	

$$\frac{m_e \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

Орбитальный момент электрона квантуется в соответствии с соотношением:

$$m_e \upsilon r = n\hbar \qquad (2)$$

Совместное рассмотрение выражений (1) и (2) дает

$$\upsilon = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в формулу де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m_e \upsilon} = \frac{2h^2 n \varepsilon_0}{m_e e^2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}62^2 \cdot 10^{-68} \cdot 3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} = 99{,}89 \cdot 10^{-11} \approx 1 \text{ нм}.$$

Ответ: λ = 1 нм.

Задача 9.4. Найти длину волны де-Бройля для: а) электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с, б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре T = 300 К, в) шарика массой m = 1 г, движущегося со скоростью $\upsilon = 1$ см/с.

Решение

а) $\upsilon = 10^6$ м/с $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг б) T = 300 К $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	а) В соответствии с формулой де-Бройля $\lambda_1 = \frac{h}{m_e \upsilon} \Rightarrow$

R = 8,31 Дж/(моль · К)
в) m = 1 г
υ = 1 см/с

$\lambda_1 - ?\ \lambda_2 - ?\ \lambda_3 - ?$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{6}} = 0{,}73 \cdot 10^{-9} = 0{,}73 \text{ нм.}$$

б) Средняя квадратичная скорость атома водорода определяется, как

$$\overline{\upsilon}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (1)$$

Масса атома водорода равна

$$m = \frac{\mu}{N_A}. \qquad (2)$$

Подставим (1) и (2) в формулу де-Бройля

$$\lambda_2 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{hN_A}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} = \frac{hN_A}{\sqrt{3\mu RT}} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{\sqrt{3 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 300}} 14{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 146 \text{ пм.}$$

в) По формуле де-Бройля

$$\lambda_3 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}} = 6{,}62 \cdot 10^{-29} \text{ м,}$$

Ответ: а) $\lambda_1 = 0{,}73$ нм, б) $\lambda_2 = 146$ пм, в) $\lambda_3 = 6{,}62 \cdot 10^{-29}$ м, т.е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона, 2) электрона, если длина волны того и другого равна 10^{-10} м.

Ответ: 1) $p_\gamma = 6{,}62 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $W_\gamma = 12{,}4$ кэВ, 2) $p_e = 6{,}62 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $W_e = 151$ кэВ.

2. Определить длину волны де-Бройля для нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при Т = 290 К.

Ответ: λ = 148 пм.

3. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де-Бройля λ для него была равна 1 нм.

Ответ: U = 0,822 мВ.

4. Определить, как изменится длина волны де-Бройля электрона в атоме водорода при переходе его с четвертой боровской орбиты на вторую.

Ответ: $\frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 2$.

5. Определить, при каком числовом значении скорости длина волны де-Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны.

Ответ: $\upsilon = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с.

6. Вывести связь между длиной круговой электронной орбиты и длиной волны де-Бройля.

Ответ: $2\pi r = n\lambda$.

7. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де-Бройля λ для двух случаев: а) $U_1 = 51$ В, б) $U_2 = 510$ кВ.

Ответ: а) $\lambda_1 = 172$ пм, б) $\lambda_2 = 1{,}4$ пм.

8. Определить длину волны де-Бройля λ электрона, если его кинетическая энергия $W_к$ = 1 кэВ.

Ответ: λ = 39 пм.

9. Сравнить длину волны де-Бройля для электрона и шарика массой 0,12 г, имеющих одинаковые скорости.

Ответ: $\frac{\lambda_ш}{\lambda_э} = 9{,}1 \cdot 10^{-27}$.

10. Сравнить длину волны де-Бройля для электрона и протона, прошедших ускоряющую разность потенциалов U = 1000 В.

Ответ: $\frac{\lambda_э}{\lambda_п} = 42{,}8$.

11. Электрон обладает кинетической энергией 1,53 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де-Бройля, если кинетическая энергия электрона уменьшится втрое?

Ответ: n = 2,24.

12. Определить длину волны де-Бройля λ, характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость $\upsilon = 1$ Мм/с. Сделать такой же подсчет для протона.

Ответ: $\lambda_э = 727$ пм, $\lambda_п = 0{,}396$ пм.

13. Электрон движется со скоростью $\upsilon = 200$ Мм/с. Определить длину волны де-Бройля λ, учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости.

Ответ: λ = 2,7 пм.

14. Найти длину волны де-Бройля λ для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

Ответ: λ = 0,33 пм.

15. Определить длину волны де-Бройля λ для электрона, находящегося на второй орбите атома водорода.

Ответ: λ = 0,67 нм.

16. Вычислить отношение кинетической энергии электрона к кинетической энергии протона с одинаковой длиной волны де-Бройля. Скорости существенно меньше, чем скорость света.

Ответ: 1836.

17. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

Ответ: 0,45 кэВ.

Занятие № 10

Тема: **Соотношение неопределенностей**

Краткая теория

Благодаря двойственной корпускулярно-волновой природе вещества для описания микрочастиц используют то волновые, то корпускулярные представления. Поведение микрочастиц не может описываться законами классической физики. В классической механике частица движется по определенной траектории и в любой момент времени точно фиксированы ее координаты и импульс. В квантовой физике понятие «длина волны в данной точке» лишено физического смысла, поэтому микрочастица с определенным импульсом имеет неопределенную координату. И наоборот, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты, то ее импульс является полностью неопределенным.

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, неопределенность импульса частицы, обусловленная ее волновыми свойствами, связана с неопределенностью координаты частицы выражением

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

где Δx – неопределенность координаты частицы, т.е. интервал возможных значений координаты, определяющей положение частицы в пространстве, Δp – неопределенность импульса частицы, т.е. интервал возможных изменений импульса частицы, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

В случае трехмерного пространства соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar.$$

Для энергии и времени соотношение неопределенностей имеет вид:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии данного квантового состояния, Δt – время пребывания системы в данном состоянии.

Примеры решения задач

Задача 10.1. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$**,** оценить нулевой энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \approx 0{,}1$ нм.

Решение

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$l = 0{,}01$ нм
$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

$E_{\min} - ?$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$$

Электрон находится в области с неопределенностью координаты

$$\Delta x = l/2.$$

Неопределенность в определении импульса не превышает сам импульс частицы: $\Delta p \leq p$. Импульс связан с энергией соотношением

$$p = \sqrt{2mE},$$

тогда

$$\frac{l}{2}\sqrt{2mE} \geq \hbar\,.$$

Переходя от неравенства к равенству, получаем:

$$E_{\min} = \frac{2\hbar^2}{ml^2},$$

$$E_{\min} = \frac{2\cdot(1{,}05\cdot10^{-34})^2}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(0{,}1\cdot10^{-9})^2} = 24{,}2\cdot10^{-19}\ \text{Дж} = 15\ \text{эВ}.$$

Ответ: $E_{\min} = 15$ эВ.

Задача 10.2. Во сколько раз длина волны де Бройля λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?

Решение

$\frac{\Delta p}{p} = 0{,}01$
$\frac{\Delta x}{\lambda} - ?$

Соотношение неопределенности для координаты и импульса частицы:

$$\Delta x\cdot\Delta p \geq \hbar\,,$$

по условию, $\Delta p = 0{,}01p$.

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},\ \ p = \hbar\frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\frac{\Delta x\cdot 0{,}01\cdot\hbar\cdot 2\pi}{\lambda} \geq \hbar\,,$$

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{1}{0{,}01\cdot 2\pi} = 16\,.$$

Ответ: в 16 раз.

Задача 10.3. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $\upsilon = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неточность $\Delta\upsilon$ в определении импульса составляет 10 % от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния. Указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

Решение

$\upsilon = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$\dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = 0{,}1$

$\Delta x - ?$

Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

$$\Delta p = m\Delta\upsilon,$$

по условию задачи $\Delta\upsilon = 0{,}1\upsilon$, тогда

$$\Delta x = \frac{\hbar}{m \cdot 0{,}1\upsilon},$$

$$\Delta x = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6} = 0{,}77 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0{,}77 \text{ нм}.$$

Диаметр атома водорода $d = 10{,}5 \cdot 10^{-11}$ м = 0,105 нм. Так как $\Delta x > d$, то понятие траектории в данном случае не применимо.

Ответ: $\Delta x = 0{,}77$ нм, $d = 0{,}105$ нм; так как $\Delta x > d$, то понятие траектории в данном случае не применимо.

Задача 10.4. Используя соотношение неопределенностей, определить наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ.

Решение

$T = 13{,}6$ эВ

$\Delta x_{\text{наим}} - ?$

Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$$

Неточность координаты частицы:

$$\Delta x \ge \frac{\hbar}{\Delta p_x}.$$

Энергия покоя частицы (электрона) $E_0 = m_0 c^2 = 0{,}511$ МэВ, значит, $T << E_0$. При этом условии электрон является нерелятивистской частицей.

Связь импульса с кинетической энергией в нашем случае

$$p = \sqrt{2mT}.$$

Это модуль вектора импульса. Проекция p_x на ось x оказывается неопределенной, так как ее величина изменяется в интервале $(-p; p)$.

Поэтому за определенность импульса Δp_x можно взять величину, не превышающую значение самого импульса

$$\Delta p_x \le p_x.$$

Отсюда величина Δx выразится так:

$$\Delta x \ge \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}},$$

$$\Delta x \ge \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 0{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Ответ: наименьшая допускаемая соотношением неопределенностей неточность $\Delta x_{\text{наим}}$, с которой можно определить координату электрона в атоме водорода есть величина порядка $5 \cdot 10^{-11}$ м.

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя соотношение неопределенностей, оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра равным 10^{-12} см.

Ответ: T = 0,21 МэВ.

2. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 1 % от ее числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

Ответ: Δx = 0,33 нм; нет.

3. При движении вдоль оси x скорость определяется с точностью до 1 см/с. Определить неопределенность координаты: 1) для электрона, 2) для дробинки массой 0,1 г.

Ответ: 1) Δx = 1,15 см, 2) Δx = 10^{-26} см.

4. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину одномерного потенциального ящика, в котором минимальная энергия электрона равна 10 эВ.

Ответ: l = 0,123 нм.

5. Электрон с кинетической энергией T = 15 эВ находится в металлической пылинке диаметром d = 1 мкм. Определить относительную неточность $\frac{\Delta \upsilon}{\upsilon}$, с которой может быть определена скорость электрона.

Ответ: $\frac{\Delta \upsilon}{\upsilon} = 1 \cdot 10^{-4}$.

6. Сравнить неопределенность при измерении скорости электрона атома водорода с величиной его скорости на первой боровской орбите.

Ответ: $\Delta \upsilon = \upsilon$.

Занятие № 11

Тема: **Уравнение Шредингера.**

Краткая теория

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики сформулировано Э. Шредингером и носит его имя. Уравнение Шредингера, зависящее от времени, имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x, y, z, t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, m – масса частицы, Δ – оператор Лапласа $\left(\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$, i – мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$, $U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется, $\psi(x, y, z, t)$ – искомая волновая функция частицы, описывающая ее состояние.

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi(x)=0,$$

где E – полная энергия частицы, $U(x)$ – потенциальная энергия, $\psi(x)$ – координатная (или амплитудная) часть волновой функции.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы:

$$\psi(x,t)=A\exp\left[\frac{t}{\hbar}(px-Et)\right],$$

где A – амплитуда волны де Бройля, p – импульс частицы, E – энергия частицы.

Уравнение Шредингера справедливо для любой частицы, движущейся с малой (по сравнению со скоростью света) скоростью $\upsilon << c$. На волновую функцию ψ накладываются условия: 1) волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной, 2) производные $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны, 3) функция $|\psi|^2$ должна быть интегрируема (условие нормировки вероятностей).

Квадрат модуля ψ функции $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности, т.е. определяет вероятность нахождения микрочастицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами (x,y,z). Таким образом, физический смысл имеет не сама ψ-функция, а квадрат ее модуля $|\psi|^2$, которым задается интенсивность волн де Бройля.

Частица на скачке потенциальной энергии (рис. 11.1).

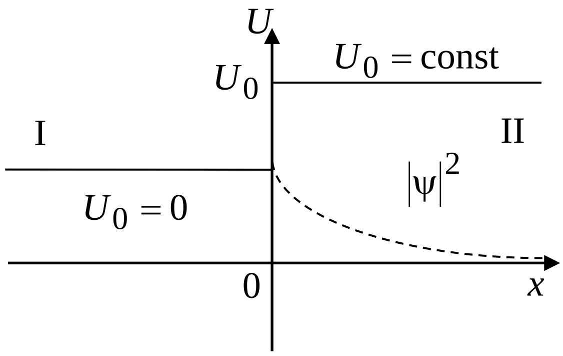


Рис. 11.1

$$U(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ U_0=\text{const} \text{ при } x>0.\end{cases}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

а) в области I $(x<0)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi;$$

б) в области II $(x>0)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+U_0\psi=E\psi.$$

Решение уравнения Шредингера (волновая функция)

а) в области I $(x<0)$:

$$\psi=A_1e^{ikx}+A_2e^{-ikx},$$

где $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$;

б) в области II $(x>0)$ решение уравнения зависит от знака разности $(E-U_0)$:

1) если полная энергия частицы E больше потенциальной U_0, то уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0,$$

где $k^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)$, решение качественно аналогично решению для области I;

2) если полная энергия E меньше потенциальной, то уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}-\chi^2\psi=0,$$

где $\chi^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}(U_0-E)$.

Волновая функция в области II в случае $E < U_0$ монотонна:

$$\psi = B_1 e^{-\chi x} + B_2 e^{\chi x}.$$

В силу требования конечности волновой функции следует положить $B_2 = 0$.

Плотность вероятности $|\psi|^2$:

а) для области I $(x < 0)$:

$$|\psi|^2 = \text{const};$$

б) для области II $(x > 0)$:

1) в случае $E > U_0$:

$$|\psi|^2 = \text{const};$$

2) в случае $E < U_0$ экспоненциально убывает

$$|\psi|^2 = B_1^2 e^{-2\chi x}.$$

Примеры решения задач

Задача 11.1. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной *l*. Написать уравнение Шредингера и его решение для области II ($0 \le x \le l$).

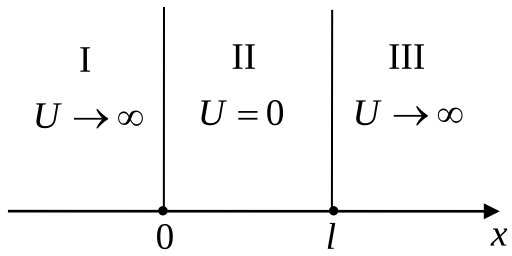


Рис. 11.1

Решение

В области II потенциальная энергия $U = 0$. Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний при $U = 0$ имеет вид:

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0.$$

Решение $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$. Константы C_1 и C_2 определяем следующим образом. На границе «ямы» (при $x = 0$, $x = l$) непрерывная волновая функция должна обращаться в нуль. Граничные условия имеют вид:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Т.е. $C_2 = 0$. Тогда $\psi(x) = C_1 \sin kx$. Условие $\psi(l) = C_1 \sin kl = 0$ выполняется при $kl = n\pi$, где n – целые числа, т.е. $k = \frac{n\pi}{l}$.

Постоянную C_1 находим из условия нормировки, которое для данного случая запишется в виде:

$$C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1.$$

Делаем преобразования левой части уравнения

$$C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = C_1^2 \int_0^l \frac{1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}}{2} dx =$$

$$C_1^2 \left[\frac{1}{2} x \Big|_0^l - \frac{1}{2} \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = C_1^2 \frac{1}{2} l.$$

Получаем

$$C_1^2 \frac{1}{2} l = 1,$$

отсюда

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Ответ: $\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0$, $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Задача 11.2. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной *l*. Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ящика.

Решение

$n = 2$ $x_1 = \frac{l}{3}$ $x_2 = \frac{2l}{3}$ $W - ?$	Вероятность W обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется равенством: $$W = \int_{x_1}^{x_2} \lvert\psi_n(x)\rvert^2 dx,$$

где $\psi_n(x)$ – нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l} x .$$

Возбужденному состоянию (n = 2) отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2\pi}{l} x .$$

Подставляем $\psi_2(x)$ в подинтегральное выражение для функции W

$$W = \frac{l}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx .$$

Согласно условию задачи, $x_1 = \frac{l}{3}$ и $x_2 = \frac{2l}{3}$. Подставим эти пределы интегрирования в выражение для W, произведем замену $\sin^2 \frac{2\pi}{l} x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{l} x\right)$ и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx = \frac{1}{l}\left\{ \int_{l/3}^{2l/3} dx - \int_{l/3}^{2l/3} \cos\frac{4\pi}{l} x dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{l}\left\{ \frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi} \sin\frac{4\pi}{l} x \Big|_{l/3}^{2l/3} \right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{4} \right).$$

Так как $\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3}$, получим:

$$W = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\cdot 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}195.$$

Ответ: $W = 0{,}195$.

Задача 11.3. Частица находится в возбужденном состоянии (n = 3) в одномерном потенциальном ящике шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < l$). Определить вероятность обнаружения частицы в средней трети ящика.

Решение

$n = 3$ $x_1 = \frac{l}{3}$ $x_2 = \frac{2l}{3}$	В одномерном случае вероятность dW обнаружения частицы в интервале dx можно определить по формуле: $$dW = \lvert\psi(x)\rvert^2 dx,$$
$W - ?$	

где $\lvert\psi(x)\rvert^2$ – плотность вероятности.

Вероятность обнаружения частицы в средней трети ящика $(l/3 < x < 2l/3)$ выражается через интеграл:

$$W = \int_{l/3}^{2l/3} \lvert\psi(x)\rvert^2 dx.$$

Собственная функция, описывающая возбужденное состояние частицы (n = 3) в потенциальном ящике, имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{3\pi}{l}x.$$

Находим искомое значение вероятности W

$$W = \frac{2}{l}\int_{l/3}^{2l/3} \sin^2\frac{3\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\int_{l/3}^{2l/3} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{6\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left[\frac{l}{3} - \frac{l}{6\pi}(\sin 4\pi - \sin 2\pi)\right] = 0{,}33.$$

Ответ: $W = 0{,}33$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода.

2. Вычислить отклонение вероятностей $\frac{W_1}{W_2}$ нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале $\frac{l}{4}$, равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной l.

Ответ: $\frac{W_1}{W_2} = 5{,}24$.

3. Оценить значение n, для которого можно считать справедливым приближение бесконечно высокой стенки, если на самом деле высота стенок ящика U конечна. Приняв $l = 10^{-10}$ м.

Ответ: $n << 14$.

4. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l. Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона ($0 < x < l$).

Ответ: $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$.

Занятие № 12

Тема: **Периодическая система элементов Д.И. Менделеева**

Краткая теория

Состояние каждого электрона в атоме однозначно характеризуется четырьмя квантовыми числами:

- главным n (n = 1, 2, 3, …);
- орбитальным (азимутальным) l (l = 0, 1, 2, 3, …, n – 1);
- магнитным m_l (m_l = 0, ±1, ±2, …, ±l);
- магнитным спиновым m_s =1/2, –1/2).

Распределение электронов в атоме подчиняется принципу Паули: в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел n, l, m_l, m_s, т.е.

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ – число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел n, l, m_l, m_s.

Число возможных состояний, соответствующих данному n:

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 .$$

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одно и то же главное квантовое число n называется электронной оболочкой. В каждой из оболочек электроны распределяются по подоболочкам, соответствующим данному l. Число подоболочек равно порядковому номеру n оболочки. Количество электронов в подоболочке определяется магнитным и магнитным спиновым квантовыми числами: максимальное число электронов в подоболочке с данным l равно $2(2l+1)$.

Обозначение оболочек, распределение электронов по оболочкам и подоболочкам (табл. 12.1).

Таблица 12.1

Главное квантовое число n	1	2		3			4				5				
Символ оболочки	K	L		M			N				O				
Максимальное число электронов в оболочке	2	8		18			32				50				
Орбитальное квантовое число l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Символ подоболочки	1*s*	2*s*	2*p*	3*s*	3*p*	3*d*	4*s*	4*p*	4*d*	4*f*	5*s*	5*p*	5*d*	5*f*	5*g*
Максимальное число электронов в подоболочке	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18

Принцип Паули позволяет объяснить Периодическую систему элементов Д.И. Менделеева, которая является основой химии, атомной и ядерной физики.

Атомный номер равен заряду ядра в единицах элементарного заряда. При обозначении расположения электронов в атоме по оболочкам ставят главное квантовое число перед обозначением подгруппы, в которой находятся электроны; число электронов в этой подгруппе пишут как показатель степени: например, $2p^3$ означает три электрона в оболочке с n = 2 и подгруппе с l = 1.

Примеры решения задач

Задача 12.1. Указать (с учетом принципа Паули), какое максимальное количество электронов в атоме может иметь следующие одинаковые квантовые числа: 1) n, l, m_l, 2) m_l, m_s, если n = 2.

Решение

По принципу запрета Паули, в атоме не может быть двух и более электронов с одинаковыми квантовыми числами. Если три квантовых числа одинаковы, то электроны отличаются спином (собственным механическим моментом импульса), который может принимать для электронов только два значения:

$$L_s = m_s\hbar, \text{ где } m_s = \pm 1/2.$$

Значит:

а) электронов с тремя одинаковыми квантовыми числами n, l, m_l может быть не более двух;

б) квантовому числу n = 2 соответствуют два значения орбитального квантового числа l(0;1). Каждому числу l соответствует набор значений магнитного квантового числа m_l (m_l = 0, ±1, ±2, …, ±l). С учетом того, что спин электронов с таким набором квантовых чисел должен быть одинаков, получим, что число таких электронов может быть не более двух. Набор квантовых чисел для этих электронов:

для 1: 2, 0, 0, +1/2;

для 2: 2, 1, 0, +1/2.

Задача 12.2. Чему равен квадрат орбитального момента импульса для электронных состояний: а) $2p$; б) $5f$?

Решение

Квадрат орбитального момента импульса определяется выражением

$$M^2 = l(l+1)\hbar^2,$$

где l – азимутальное квантовое число, принимающее целочисленные значения в интервале $0 = l = n - 1$; n – главное квантовое число.

Совокупность электронов с одним и тем же значением главного квантового числа называется электронной оболочкой. Электроны с одинаковыми значениями главного и азимутального квантовых чисел образуют подоболочку, обозначаемую буквами латинского алфавита *s*, *p*, *d*, *f* и далее по алфавиту в порядке возрастания числа *l*. Значение главного квантового числа *n* указывается перед условным обозначением азимутального квантового числа *l*.

Поскольку *l* всегда меньше *n*, возможны следующие состояния электрона:

$n = 1 : 1s(l = 0)$;

$n = 2 : 2s(l = 0), 2p(l = 1)$;

$n = 3 : 3s(l = 0), 3p(l = 1), 3d(l = 2)$;

$n = 4 : 4s(l = 0), 4p(l = 1), 4d(l = 2), 4f(l = 3)$;

$n = 5 : 5s(l = 0), 5p(l = 1), 5d(l = 2), 5f(l = 3), 5g(l = 4)$;

и так далее.

Следовательно, в случае:

а) электронное состояние задано в виде 2*p*, т.е. $n = 2, l = 1$, тогда

$$M^2 = 1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2;$$

б) электронное состояние задано в виде $5f$, т.е. $n = 5, l = 3$, тогда

$$M^2 = 3(3+1)\hbar^2 = 12\hbar^2.$$

Ответ: а) $M^2 = 2\hbar^2$; б) $M^2 = 12\hbar^2$.

Задача 12.3. Состояние атома характеризуется квантовыми числами *L* и *S*, равными: а) 2 и 2; б) 3 и 2; в) 2 и 3; г) 1 и 3/2. Написать возможные значения квантового числа *J* при данных значениях *L* и *S*.

Решение

а) $L = 2; S = 2$;

б) $L = 3; S = 2$;

в) $L = 2; S = 3$;

г) $L = 1; S = 3/2$;

$J - ?$

Квантовое число *L* характеризует суммарный орбитальный момент импульса электронов в атоме

$$M = \hbar\sqrt{L(L+1)},$$

Оно может принимать целочисленные неотрицательные значения.

Квантовое число S определяет результирующий спиновый момент импульса электронов в атоме:

$$M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}.$$

Спиновое число S может быть целым либо полуцелым неотрицательным числом в зависимости от того, четным или нечетным является число электронов в атоме. При четном числе электронов N квантовое число S принимает все полученные значения от $N/2$ (одинаковая ориентация спиновых моментов всех электронов) до 1/2 (все спиновые моменты, кроме одного, попарно компенсируют друг друга). В зависимости от относительной ориентации орбитального M_l и спинового моментов импульса M_S, квантовое число J результирующего момента импульса атома M_J может принимать одно из следующих значений:

$$J = L + S;\ L + S - 1;....;\ |L - S|.$$

Следовательно, в случае:

а) $J_{\max} = 4;\ J_{\min} = 0$;

б) $J_{\max} = 5;\ J_{\min} = 1$;

в) $J_{\max} = 5;\ J_{\min} = 1$;

г) $J_{\max} = 5/2;\ J_{\min} = 1/2$.

Ответ: а) 4, 3, 2, 1, 0; б) 5, 4, 3, 2, 1; в) 5, 4, 3, 2, 1; г) 5/2, 3/2, 1/2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите суммарное максимальное число s-, p-, d-, f- и g-электронов, которые могут находиться в N- и O-оболочках атома.

Ответ: 82.

2. Запишите квантовые числа, определяющие внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома натрия.

3. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите символически электронную конфигурацию следующих атомов в основном состоянии: 1) неона; 2) аргона; 3) криптона.

4. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 4$. Определите число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_l = -3$; 2) $m_s = 1/2$, $l = 2$; 3) $m_s = -1/2$, $m_l = 1$.

Ответ: 1) 2; 2) 5; 3) 3.

5. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите символически электронную конфигурацию атома меди в основном состоянии.

6. Определите в Периодической системе элементов порядковый номер элемента, у которого в основном состоянии заполнены *K*-, *L*-, *M*-оболочки, а также 4*s*-подоболочка.

7. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 3s^2 3p$. Определите, что это за элемент.

8. Сколько *s*-, *p*- и *d*-электронов находится в атоме на первом, втором и третьем энергетических уровнях?

9. Основное состояние атома цезия обозначается символически следующим образом: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s$. Определить число слоев и оболочек, количество электронов в каждом слое и оболочке и общее число электронов.

Занятие № 13

Тема: **Центральное симметричное силовое поле. Атом водорода**

Краткая теория

По теории Бора электрон в атоме водорода и водородоподобных систем движется по круговой орбите радиуса *r*, на которой его удерживает кулоновская сила притяжения электрона к ядру, играющая роль центростремительной силы. Энергия электрона в атоме водорода складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в центральном симметричном силовом поле ядра.

Согласно первому постулату Бора, движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению

$$m\upsilon_k r_k = k\frac{h}{2\pi},$$

где m – масса электрона, υ_k – его скорость на k-ой орбите, r_k – радиус этой орбиты, h – постоянная Планка, k – любое целое число (квантовое число).

Согласно второму постулату Бора, частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой

$$h\nu = E_n - E_k,$$

где k и n – номера соответствующих орбит ($n > k$), E_k и E_n – значения энергии электрона на соответствующих орбитах.

Частота или длина волны λ, соответствующие линиям водородного спектра:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где k и n – номера орбит, c – скорость света в вакууме, R – постоянная Ридберга, равная

$$R = \frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1},$$

где e – заряд электрона, m – его масса, ε_0 – электрическая постоянная.

Частота ν или длина волны для водородоподобных ионов:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rcz^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Радиус n-ой стационарной орбиты:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e z e^2},$$

где n = 1, 2, 3,…, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

Полная энергия электрона в водородоподобной системе

$$E = \frac{m_e \upsilon^2}{2} - \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Энергия электрона может принимать только следующие дозволенные дискретные значения:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{z^2 m_e e^4}{8\hbar^2\varepsilon_0^2}, \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Примеры решения задач

Задача 13.1. Определить первый боровский радиус орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

Решение

$z = 1$ $n = 1$	Радиус n-ой орбиты в водородоподобном атоме, заряд которого равен z_e, определяется по формуле
$r_1, \upsilon - ?$	

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{mze^2} n^2 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi mze^2} n^2,$$

где n – номер орбиты, m – масса электрона.

При $n = 1$ и $z = 1$

$$r_1 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi me^2} = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-38}} = 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

По второму постулату Бора момент импульса на n-ой орбите равен

$$m\upsilon r_n = n \frac{h}{2\pi},$$

тогда

$$\upsilon = \frac{nh}{2\pi m r_n} = \frac{1 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Ответ: $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м, $\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 13.2. Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую.

Решение

$m = 2$ $n = 6$ $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$	Длина волны фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по обобщенной формуле Бальмера
$\lambda - ?$	

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{1}{R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)} = 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Ответ: $\lambda = 4{,}1 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 13.3. Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ($\lambda = 0{,}4 \div 0{,}76$ мкм)? Вычислить длины волн этих линий. Каким цветам они соответствуют?

Решение

$0{,}4 \le \lambda \le 0{,}76$ мкм
$R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
$\lambda - ?$

Длины волн спектра атома водорода определяются по формуле:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots,\ m = n+1, n+2, \ldots$.

В видимой области спектра находятся первые четыре линии Бальмера ($n = 2$, $m = 3, 4, 5, 6$). Длины волн этих линий будут равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{R_1\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)} = 6{,}56 \cdot 10^{-7} \text{ м – красная линия,}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 4{,}86 \cdot 10^{-7} \text{ м – голубая линия,}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)} = 4{,}34 \cdot 10^{-7} \text{ м – фиолетовая линия,}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right)} = 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ м – фиолетовая линия.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Атом водорода испустил фотон с длиной волны $4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м. На сколько изменилась энергия электрона в атоме?

Ответ: $\Delta E = 2{,}56$ эВ.

2. Найти кинетическую, потенциальную и полную энергии электрона на первой боровской орбите.

Ответ: $E_к = 13{,}6$ эВ, $E_п = -27{,}2$ эВ, $E = -13{,}6$ эВ.

3. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

Ответ: $E = 12{,}1$ эВ.

4. Найти потенциал ионизации U_i атома водорода.

Ответ: $U_i = 13{,}6$ В.

5. Определить скорость электрона на третьей орбите атома водорода.

Ответ: $\upsilon = 0{,}73 \cdot 10^6$ м/с.

6. Определить частоту вращения электрона по третьей орбите атома водорода в теории Бора.

Ответ: $\nu = 2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц.

7. Вычислить длину волны, которую испускает ион гелия He^+ при переходе со второго энергетического уровня на первый.

Ответ: $\lambda = 3{,}03 \cdot 10^{-8}$ м.

8. Найти энергию E_i и потенциал U_i ионизации ионов He^+ и Li^{2+}.

Ответ: гелий: $E_i = 54$ эВ, $U_i = 54$ В; литий: $E_i = 122$ эВ, $U_i = 122$ В.

9. Найти радиус r_1 первой боровской электронной орбиты для однократно ионизированного гелия и скорость υ_1 электрона на ней.

Ответ: $r_1 = 26{,}6$ пм, $\upsilon_1 = 4{,}37 \cdot 10^6$ м/с.

10. Найти длину волны фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизованном атоме гелия.

Ответ: $\lambda = 30{,}4$ нм.

Занятие № 14

Тема: **Законы радиоактивного распада**

Краткая теория

Радиоактивностью называется превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием некоторых частиц.

Естественной радиоактивностью называется радиоактивность существующих в природе неустойчивых изотопов.

Искусственной радиоактивностью называется радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций.

Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется закону радиоактивного распада.

Число атомов радиоактивного вещества dN, распадающихся за время dt, пропорционально числу имеющихся атомов и определяется соотношением

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

где λ – постоянная радиоактивного распада, интегрируя, получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 – число атомов в момент времени $t = 0$, N – число их по истечении времени t.

Число распадов, происходящих в препарате за единицу времени, называется активностью радиоактивного препарата (1 Бк = 1 расп/с)

$$a\ [\text{Бк}] = \frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Период полураспада $T_{1/2}$ и постоянная распада λ связаны соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Величина $T = \dfrac{1}{\lambda}$, обратная постоянной распада, называется средним временем жизни радиоактивного атома.

Активность образца в начальный момент (при $t = 0$)

$$a_0 = \lambda N_0.$$

Если имеется смесь ряда радиоактивных веществ, образующихся одно из другого, то в смеси устанавливается состояние радиоактивного равновесия, при котором активности всех членов ряда равны между собой

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \ldots \lambda_k N_k.$$

Примеры решения задач

Задача 14.1. За год распалось 60 % некоторого исходного радиоактивного элемента. Определить период полураспада этого элемента.

Решение

Дано	
t = 1 год	По закону радиоактивного распада
$\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}6$	$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$
$T_{1/2} - ?$	

Постоянная радиоактивного распада связана с полупериодом распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

По условию задачи

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 0{,}6;$$

$$e^{-\lambda t} = 0{,}4;$$

$$e^{\lambda t} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5;$$

$$\lambda t = \ln 2{,}5,\ \lambda = \frac{\ln 2{,}5}{t}.$$

Тогда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln 2{,}5} = \frac{\ln 2 \cdot 1}{\ln 2{,}5} = 0{,}76 \text{ года}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 0{,}76$ года.

Задача 14.2. Определить постоянную распада и число атомов радона, распавшихся в течение суток, если первоначальная масса радона 10 г. Период полураспада $^{222}_{86}\mathrm{Ra}$ равен 3,82 сут.

Решение

Дано	
t = 1 сут	Число атомов радона
$T_{1/2} = 3{,}82$ сут	$$N_0 = N_A \frac{m}{M},$$
$m = 10$ г = 10^{-2} кг	
$\lambda - ?$ $N_1 - ?$	

где N_A – число Авогадро, M – молярная масса радона, M = 222 кг/моль, m – масса радона.

Число атомов, распавшихся за t = 1 сут, будет

$$N_1 = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = N_A \frac{m}{M}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}\right) =$$

$$= 6{,}02 \cdot 10^{26} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{222}\left(1 - e^{-\frac{0{,}693}{3{,}82}\cdot 1}\right) = 4{,}3 \cdot 10^{21} \text{ атомов.}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{3{,}82} = 0{,}181 \text{ сут}^{-1}.$$

Ответ: $\lambda = 0{,}181$ сут$^{-1}$, $N = 4{,}3 \cdot 10^{21}$ атомов.

Задача 14.3. Масса препарата радиоактивного магния ^{27}Mg равна 0,2 мкг. Определить начальную активность препарата.

Решение

$m = 0{,}2$ мкг = = 0,2 · 10^{-9} кг	Начальная активность препарата
$a_0 - ?$	$a_0 = \lambda N_0$.

Постоянная радиоактивного распада

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

где $T_{1/2}$ = 10 мин (табличные данные).

Количество атомов в препарате в начальный момент

$$N_0 = \frac{m_0}{M} N_A,$$

где $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Тогда

$$a_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m_0}{M} N_A = \frac{0{,}693 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-9} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{600 \cdot 27 \cdot 10^{-3}} = 5{,}15 \cdot 10^{12} \text{ расп/с.}$$

Ответ: $a_0 = 5{,}15 \cdot 10^{12}$ расп/с.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько ядер, содержащихся в 1 г трития ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$, распадается за среднее время жизни этого изотопа?

Ответ: $N' = 1{,}27 \cdot 10^{23}$.

2. Период полураспада радиоактивного аргона ${}^{41}_{18}\mathrm{Ar}$ равен 110 мин. Определить время, в течение которого распадается 25 % начального количества ядер.

Ответ: $t = 46$ мин.

3. За восемь суток распалось 75 % начального количества радиоактивного нуклида. Определить период полураспада.

Ответ: $T_{1/2} = 4$ сут.

4. За один год начальное количество радиоактивного нуклида уменьшилось в 3 раза. Во сколько раз оно уменьшается за 2 года?

Ответ: в 9 раз.

5. За какое время распадается 1/4 начального количества ядер радиоактивного нуклида, если период его полураспада 24 ч?

Ответ: $t = 10{,}5$ ч.

6. Период полураспада ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ равен 5,3 года. Определить, какая доля первоначального количества ядер этого изотопа распадается через 5 лет.

Ответ: $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}48$.

7. Найти массу радона, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Ответ: $m = 6{,}5 \cdot 10^{-9}$ кг.

8. Найти активность a радона, образовавшегося из массы $m = 1$ г радия за время $t = 1$ ч.

Ответ: $a = 2{,}8 \cdot 10^{8}$ Бк.

9. Вычислить массу радона ${}^{222}\mathrm{Ra}$, находящегося в радиоактивном равновесии с 1 г радия ${}^{222}\mathrm{Ra}$.

Ответ: $m = 6{,}33$ мкг.

10. На сколько процентов снизится активность изотопа иридия ${}^{192}\mathrm{Ir}$ через месяц?

Ответ: на 24 %.

Занятие № 15

Тема: **Элементарные частицы**

Краткая теория

Мельчайшие микрочастицы вещества, не являющиеся молекулами, атомами или ядрами называются *элементарными частицами*. Термин *элементарные* является условным, т.е. не означает, что частицы не могут быть структурированы. Характерной особенностью элементарных частиц является их способность к взаимным превращениям.

Элементарные частицы принято делить на три группы:

фотоны; эта группа состоит из одной частицы – фотона – кванта электромагнитного излучения;

лептоны, участвующие только в электромагнитном и слабом взаимодействиях – электронное и мюонное нейтрино, электрон, мюон, π-лептон, таонное нейтрино;

адроны, обладающие сильным взаимодействием наряду с электромагнитным и слабым – протон, нейтрон, ионы и каоны.

Для всех типов взаимодействия элементарных частиц выполняются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда.

Для процессов взаимопревращаемости элементарных частиц, обусловленных сильными взаимодействиями, выполняются все законы сохранения – энергии, рядов (электрического, лептонного и барионного), изоспина, странности и четности. В процессах, обусловленных слабыми взаимодействиями, не сохраняются только изоспин, странность и четность.

Согласно модели Гелл-Манна-Цвейга, все известное адроны можно построить, постулировав существование трех типов кварков (u, d, s), и соответствующих антикварков ($\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{s}$), имеющих дробные электрические и барионные заряды (табл. 15.1)

Таблица 15.1.

Характеристики кварков (антикварков)

Тип кварка	Электрический заряд, q	Барионное число, B	Спин	Странность, S	Очарование, c	Цвет
u	+2/3	+1/3	1/2	0	0	желтый
d	-1/2	+1/3	1/2	0	0	-“-
s	-1/2	+1/3	1/2	-1	0	-“-
c	+2/3	+1/3	1/2	0	1	-“-
b	-1/3	+1/3	1/2	0	0	-“-
t	+2/3	+1/3	1/2	0	0	-“-
$\tilde{u}$	-2/3	-1/2	1/2	0	0	фиолетовый, оранжевый, зеленый
$\tilde{d}$	+1/3	-1/3	1/2	0	0	-“-
$\tilde{s}$	+1/3	-1/3	1/2	1	0	-“-
$\tilde{c}$	-2/3	-1/3	1/2	0	-1	-“-
$\tilde{b}$	+1/3	-1/3	1/2	0	0	-“-
$\tilde{t}$	-2/3	-1/3	1/2	0	0	-“-

Примеры решения задач

Задача 15.1. Известно, что в углеродно-азотном, или углеродном, цикле число ядер углерода остается неизменным. В результате этого цикла четыре ядра водорода ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ (протона) превращаются в ядро гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, а также образуются три γ-кванта, два позитрона и два нейтрино. Записав эту реакцию, определите выделяющуюся в этом процессе энергию.

Решение

$m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{e^+} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$Q - ?$

$$4{}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2{}^{0}_{+1}e + 2{}^{0}_{0}\nu_e + 3\gamma + Q,$$

$$\Delta m = 4m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} - \left(m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} + 2m_{e^+}\right),$$

$$Q = \Delta m c^2 = \left(4m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} - m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} - 2m_{e^+}\right)c^2 =$$

$$= \left(4 \cdot 1{,}6736 \cdot 10^{-27} - 6{,}6467 \cdot 10^{-27} - 2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\right) \cdot 9 \cdot 10^{16} =$$

$$= 4{,}129 \cdot 10^{10} \text{ Дж} = 25{,}8 \text{ МэВ}.$$

Ответ: Q = 25,8 МэВ.

Задача 15.2. Известно, что продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Запишите цепочку реакций для π^+ и π^- мезонов.

Решение

$$\pi^+ \to \mu^+ + {}_0^0\nu_\mu,\ \mu^+ \to {}_{+1}^{0}e + {}_0^0\nu_e + {}_0^0\tilde{\nu}_\mu,$$

$$\pi^- \to \mu^- + {}_0^0\tilde{\nu}_\mu,\ \mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_0^0\tilde{\nu}_e + {}_0^0\nu_\mu.$$

Задача 15.3. Сконструировать из трех кварков протон и нейтрон.

Решение

Согласно модели Гелл-Манна-Цвейга, все известные адроны можно построить из трех типов кварков (u, d, s), и соответствующих антикварков ($\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{s}$).

Протон имеет кварковую структуру – uud, нейтрон – udd.

Задачи для самостоятельного решения

1. Запишите схемы распада положительного и отрицательного мюонов.

Ответ: $\mu^+ \to {}_{+1}^{0}e + {}_0^0\nu_e + {}_0^0\tilde{\nu}_\mu$, $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_0^0\tilde{\nu}_e + {}_0^0\nu_\mu$.

2. При захвате протоном отрицательного мюона образуется нейтрон и еще одна частица. Запишите эту реакцию и определите, что это за частица.

Ответ: $\mu^- + {}_1^1p \to {}_0^1n + {}_0^0\nu_\mu$.

3. π^0-мезон распадается в состоянии покоя на два γ-кванта. Принимая массу покоя пиона равной $264{,}1\,m_e$, определите энергию каждого из возникших γ-квантов.

Ответ: $E_\gamma = 67{,}7$ МэВ.

4. При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникают два γ-кванта. Определите энергию каждого из возникших γ-квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Ответ: $E_\gamma = 942$ МэВ.

5. Выбрав из четырех типов нейтрино $(\nu_e, \tilde{\nu}_e, \nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu)$ правильное, напишите недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

1) $x + {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^{\;\,0}_{-1}e$,

2) $x + {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + \mu^-$,

3) $x + {}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^{\;\,0}_{+1}e$.

Ответ: 1) ${}^0_0\nu_e + {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^{\;\,0}_{-1}e$, 2) ${}^0_0\nu_\mu + {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + \mu^-$, 3) ${}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^{\;\,0}_{+1}e$.

6. Примените операцию зарядового сопряжения к следующим процессам: 1) $\pi^\circ \rightarrow 2\gamma$, 2) $p + k^- \rightarrow \varepsilon^\circ + \pi^+ + \pi^-$.

Ответ: 1) $\pi^\circ \rightarrow 2\gamma$, 2) $\tilde{p} + k^- \rightarrow \tilde{\varepsilon}^\circ + \pi^- + \pi^+$.

7. Запишите, какие комбинации известных в настоящее время кварков воспроизводят свойства: 1) π^+-мезона, 2) π^--мезона, 3) ε°-гиперона.

Ответ: 1) π^+-мезона ($u\tilde{d}$), 2) π^--мезона ($\tilde{u}d$), 3) ε°-гиперона (uds).

8. Запишите продукты распада антинейтрино.

Ответ: ${}^1_0\tilde{n} \rightarrow {}^{\;\,1}_{-1}\tilde{p} + {}^0_1e + {}^0_0\nu_e$.

9. k^+-мезон распадается (в состоянии покоя) на два пиона. Принимая массу покоя каона равной $966{,}2\,m_e$ и пренебрегая разностью масс заряженного и нейтрального пионов, определите энергию каждого из возникших пионов.

Ответ: E = 247,5 МэВ.

10. Известно, что распад нейтрального короткоживущего каона происходит по схеме $k_S^\circ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Принимая, что до момента распада каон покоился и его масса покоя составляет $974\,m_e$, определите массу покоя образовавшихся заряженных π-мезонов, если известно, что масса каждого образовавшегося пиона в 1,783 раза больше его массы покоя.

Ответ: $m_\pi = 273{,}1 m_e$.

11. Построить из кварка и антикварка мезоны: π^+, k^- и k°.

Ответ: π^{+} $(u\tilde{d})$, k^{-} $(\tilde{u}d)$, k° $(\tilde{d}s)$.

12. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества, кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу m ядер замедляющего вещества.

Ответ: m = 12 а.е.м. (графит).

13. Какую часть первоначальной скорости будет составлять скорость нейтрона после упругого центрального столкновения с неподвижным ядром изотопа $^{23}_{11}\mathrm{Na}$?

Ответ: 92 %.

14. Для получения медленных нейтронов их пропускают через вещества, содержащие водород (например, парафин). Какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0 может передать: а) протону (масса m_0), б) ядру атома свинца (масса $207m_0$)? Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному столкновению.

Ответ: а) 100 %, б) 1,9 %.

15. Найти в предыдущей задаче распределение энергии между нейтроном и протоном, если столкновение неупругое. Нейтрон при каждом столкновении отклоняется в среднем на угол φ = 45°.

Ответ: энергия распределяется поровну между нейтроном и протоном.

16. Нейтрон, обладающий энергией $W_0 = 4{,}6$ МэВ, в результате столкновений с протонами замедляется. Сколько столкновений он должен испытать, чтобы его энергия уменьшилась до $W = 0{,}23$ эВ? Нейтрон отклоняется при каждом столкновении в среднем на угол φ = 45°.

Ответ: n = 24.

Занятие № 16

Тема: **Энергия связи ядра. Деление ядер. Цепная ядерная реакция**

Краткая теория

Энергия связи ядра определяется соотношением

$$W = c^2 \Delta m,$$

где Δm – разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра (дефект массы):

$$\Delta m = zm_p + (A - z)m_n - m_я,$$

где z – порядковый номер изотопа, A – массовое число, m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, $m_я$ – масса ядра изотопа.

Изменение энергии при ядерной реакции

$$Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right),$$

где $\sum m_1$ – сумма масс частиц до реакции, $\sum m_2$ – сумма масс частиц после реакции.

Символическая запись ядерной реакции может быть дана в развернутом виде, например,

$${}^{9}_{2}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}$$

или сокращенно

$${}^{9}\mathrm{Be}(p, \alpha){}^{6}\mathrm{Li}.$$

В ядерных реакциях выполняются законы сохранения:

числа нуклонов

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4;$$

заряда

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4;$$

релятивистской полной энергии

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4;$$

импульса

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_3 + \bar{p}_4.$$

Цепная реакция деления характеризуется коэффициентом размножения k нейтронов, который равен отношению числа нейтронов в данном поколении к их числу в предыдущем поколении.

Число нейтронов N в момент времени t определяется по формуле

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

где N_0 – число нейтронов в начальный момент времени, T – среднее время жизни одного поколения.

Примеры решения задач

Задача 16.1. Вычислить энергию ядерной реакции ${}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to p + {}^7_3\mathrm{Li}$. Выделяется или поглощается энергия при этой реакции?

Решение

Энергия ядерной реакции определяется по формуле:

$$Q = c^2\left(m_1 + m_2 - \sum m_i'\right), \tag{1}$$

где m_1 и m_2 – массы частиц, вступающих в реакцию, $\sum m_i'$ – сумма масс частиц, образовавшихся в результате реакции.

Если массу частиц выражать в а.е.м., а энергию реакции в МэВ, то формула (1) примет вид

$$Q = 931(m_1 + m_2 - \sum m_i'). \tag{2}$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать массы атомов вместо масс их ядер. Из справочных данных находим

$$m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 4{,}00260 \text{ а.е.м.};$$

$$m_{{}^1_1\mathrm{H}} = 1{,}00783 \text{ а.е.м.};$$

$$m_{{}^7_3\mathrm{Li}} = 7{,}01601 \text{ а.е.м.}$$

Дефект массы реакции равен

$$2m_{{}^4_2\mathrm{He}} - m_{{}^1_1\mathrm{H}} - m_{{}^7_3\mathrm{Li}} = -0{,}01864 \text{ а.е.м.}$$

Подставляя значения дефекта массы реакции в (2), получим

$$Q = 931(-0{,}01864) = -17{,}4 \text{ МэВ}.$$

Поскольку $Q < 0$, то энергия в результате реакции поглощается.

Ответ: $Q = -17{,}4$ МэВ. Энергия поглощается.

Задача 16.2. Найти энергию реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, если известно, что кинетические энергии протона $T_{\mathrm{H}} = 5{,}45$ МэВ, ядра гелия $T_{\mathrm{He}} = 4$ МэВ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро мишень ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ неподвижно.

Решение

$T_{\mathrm{H}} = 5{,}45$ МэВ $T_{\mathrm{He}} = 4$ МэВ	Энергия реакции Q есть разность между суммой кинетических энергий ядер продуктов в реакции и кинетической энергией налетающего ядра:
$Q - ?$	

$$Q = T_{\mathrm{Li}} + T_{\mathrm{He}} - T_{\mathrm{H}}.$$

Для определения T_{Li} лития воспользуемся законом сохранения импульса

$$\overline{P}_{\mathrm{H}} = \overline{P}_{\mathrm{He}} + \overline{P}_{\mathrm{Li}}.$$

Векторы $\overline{P}_{\mathrm{H}}$ и $\overline{P}_{\mathrm{He}}$ по условию задачи взаимно перпендикулярны, поэтому

$$P_{\mathrm{Li}}^{2} = P_{\mathrm{He}}^{2} + P_{\mathrm{H}}^{2}.$$

Выразим импульсы ядер через их кинетические энергии. Можно воспользоваться классической формулой

$$p^{2} = 2mT.$$

Тогда

$$m_{\mathrm{Li}}T_{\mathrm{Li}} = m_{\mathrm{He}}T_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H}}T_{\mathrm{H}}.$$

Откуда

$$T_{Li} = \frac{m_{\mathrm{He}}T_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H}}T_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{Li}}} = \frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 5{,}45}{6} = 3{,}58 \text{ МэВ}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$Q = T_{\mathrm{He}} + T_{\mathrm{Li}} - T_{\mathrm{H}} = (3{,}58 + 4 - 5{,}45) = 2{,}13 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $Q = 2{,}13$ МэВ.

Задача 16.3. Какую энергию W (в киловатт-часах) можно получить от деления массы $m = 1$ г урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, если при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ?

Решение

m = 1 г урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ $Q = 200$ МэВ	Полученная энергия W может быть представлена как
$W - ?$	

$$W = QN,$$

где N – число атомов, содержащихся в 1 г урана.

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где M – молярная масса урана, N_A – число Авогадро.

Тогда

$$W = Q\frac{m}{M}N_A = 200 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{1 \cdot 10^{-3}}{235 \cdot 10^{-3}} 6{,}02 \cdot 10^{23} = 8{,}2 \cdot 10^{12} \text{ Дж.}$$

Учитывая, что 1 кВт · ч = 3,6 · 10^6 Дж, получим

$$W = \frac{8{,}2 \cdot 10^{12}}{3{,}6 \cdot 10^6} = 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ кВт · ч.}$$

Ответ: $W = 2{,}3 \cdot 10^4$ кВт · ч.

Задача 16.4. Определите, во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной ядерной реакции за время t = 10 с, если среднее время жизни T одного поколения составляет 80 мс, а коэффициент размножения нейтронов k = 1,002.

Решение

T = 10 с T = 80 мс = 8 · 10^{-2} с k = 1,002	Из формулы для числа нейтронов в момент времени t получим отношение N / N_0:
$N / N_0 - ?$	

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{\frac{(k-1)t}{T}} = e^{\frac{(1{,}002-1)\cdot 10}{8\cdot 10^{-2}}} = 1{,}284 .$$

Ответ: $\frac{N}{N_0} = 1{,}284$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра элемента ${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$.

Ответ: $\Delta m = 3{,}5 \cdot 10^{-28}$ кг, $E_{\text{св}} = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж.

2. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Ответ: $Q = 17{,}3$ МэВ.

3. Найти энергию Q, поглощенную при реакции ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}$.

Ответ: $Q = 1{,}18$ МэВ.

4. Вычислить энергию термоядерной реакции ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n$.

Ответ: E = 17,6 МэВ.

5. Какое количество энергии освобождается при соединении одного протона и двух нейтронов в одно ядро?

Ответ: E = 8 МэВ.

6. При делении одного ядра урана-235 выделяется энергия 200 МэВ. Каждую долю энергии покоя ядра урана-235 составляет выделившаяся энергия?

Ответ: 0,00091.

7. Какая масса m урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ расходуется за время t = 1 сут на атомной электростанции мощностью P = 5000 кВт? КПД принять равным 17 %. Считать, что в каждом акте распада выделяется энергия Q = 200 МэВ.

Ответ: m = 31 г.

8. Найти электрическую мощность атомной электростанции, расходующей 0,1 кг урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ в сутки, если КПД станции 16 %.

Ответ: N = 15 МВт.

9. Сколько ядер урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ должно делится в 1 с, чтобы тепловая мощность ядерного реактора была равна 1 Вт?

Ответ: $3{,}1 \cdot 10^{10}$ $с^{-1}$.

10. Определить суточный расход ядерного горючего ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ в ядерном реакторе атомной электростанции. Тепловая мощность электростанции 10000 кВт. Принять энергию, выделяющуюся при одном акте деления, равной 200 МэВ и КПД электростанции 20 %.

Ответ: m = 53 г.

11. В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни одного поколения нейтронов составляет T = 90 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов k = 1,003, определить период τ реактора, т.е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов увеличится в e раз.

Ответ: τ = 30 с.

Библиографический список

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2004.
2. Трофимова Т.И. Физика в таблицах и формулах. – М.: АСАДЕМА, 2006.
3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – СПб.: Книжный мир, 2003.
4. Бублей С.М., Малюков С.П., Медведев В.П. Физика. Задачи повышенной сложности. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005.

СОДЕРЖАНИЕ

Матухин Вадим Леонидович, Гонюх Евгения Алексеевна,
Килеев Анвар Исмагилович, Корягина Евгения Львовна,
Тузова Лидия Леонидовна

ОПТИКА. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ
СБОРНИК ЗАДАЧ
для расчетных заданий по курсу «Физика»
(с методическими указаниями и примерами решения
типовых задач)

(Кафедра физики КГЭУ)

Редактор издательского отдела Н.Г. Приклонская

Изд. Лиц. ИД № 03480 от 08.12.00. Подписано в печать . . . .
Формат 60х84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Физ. печ. л. 5,3. Усл. печ. л. 4,9. Уч.-изд. л. 5,5.
Тираж 450 экз. Заказ №

Издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51

Типография КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51