Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б. Н. Ельцина»

УТВЕРЖДАЮ

Директор по образовательной деятельности

_____________________ С.Т. Князев

«7» сентября 2023 г.

Векторный анализ

Учебно-методические материалы по направлению подготовки
09.03.03 Прикладная информатика
Образовательная программа «Прикладной искусственный интеллект»

Екатеринбург

2023

РАЗРАБОТЧИКИ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Доцент, кандидат физико-математических наук	______________________	Белоусова В.И.

Код раздела, темы	Раздел, тема дисциплины*	Содержание
1	Алгебраические структуры. Поле комплексных чисел.	Понятие алгебраической структуры, понятие группы, кольца, поля. Поле комплексных чисел. Комплексные числа. Три формы записи комплексных чисел, операции над комплексными числами, свойства операций. Задание линий и областей с помощью комплекснозначной переменной
2	Линейные пространства. Линейная зависимость.	Понятие (аксиомы) линейного пространства над полем. Понятие подпространства. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Базис и размерность л.п. Координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в разных базисах
3	Линейные пространства. Ранг матрицы	Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли о совместности систем линейных уравнений (СЛУ). Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной СЛУ. Размерность пространства решений. Фундаментальная система решений
4	Линейные пространства. Евклидовы пространства	Аксиоматическое определение скалярного произведения векторов. Евклидовы пространства. Связь евклидовых пространств с нормированными и метрическими пространствами. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональный и ортонормированный базисы евклидова пространства. Процесс ортогонализации векторов Грама-Шмидта. Матрица Грама. Ортогональное дополнение подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора на подпространство. Расстояние от вектора до подпространства. Унитарные (эрмитовы) пространства.

5	Линейный оператор векторного пространства. Матрица линейного оператора.	Линейный оператор векторного (линейного) пространства. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Образ и ядро, ранг и дефект линейного оператора.
6	Линейный оператор векторного пространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.	Алгебра линейных операторов. Обратимый линейный оператор. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен оператора.
7	Линейный оператор векторного пространства. Оператор простой структуры.	Критерий диагонализируемости. Оператор простой структуры. Жорданова нормальная форма (ЖНФ).
8	Квадратичные формы	Квадратичные формы в афинном пространстве. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
9	Интегралы по фигуре. Криволинейные интегралы 1-го рода.	Понятие фигуры и интеграла по фигуре. Свойства интегралов по фигуре. Криволинейные интегралы 1-го рода.
10	Интегралы по фигуре. Двойные интегралы.Тройные интегралы. Поверхностные интегралы 1-го рода	Двойные интегралы. Тройные интегралы. Поверхностные интегралы 1-го рода
11	Теория поля.Поток векторного поля.	Скалярные и векторные поля. Поток векторного поля.
12	Теория поля. Дивергенция и ротор.	Линейный интеграл. Дивергенция. Формулы Остроградского – Гаусса, Грина и Стокса. Ротор. Потенциальные и соленоидальные поля и их свойства. Оператор Гамильтона

Оглавление

Лекция 1. Алгебраические структуры. Алгебраическая операция

Определение. Пусть дано некоторое множество $X \neq \emptyset$.

$n-$арной алгебраической операцией на X называется отображение

$$\omega : X^n \to X$$

При $n=2$ операция называется бинарной, при $n=1$– унарной, а при $n=0$ – нульарной (означает фиксирование некоторого элемента в X).

Алгебраическую операцию на множестве X обозначают каким-нибудь специальным символом: *, о, ⊕, +, – и т.п.

Примеры алгебраических операций.

1. N – множество натуральных чисел.

Какие действия можно выполнять с натуральными числами?

Складывать, вычитать, умножать, делить и т.д.

Операции сложения, умножения – бинарные алгебраические операции. Операции вычитания, деления не являются алгебраическими операциями, т.к. результат операции может и не принадлежать множеству N.

2. На множестве целых чисел Z алгебраическими (бинарными) операциями являются операции сложения, вычитания, умножения. Операция деления не является алгебраической операцией.

3. Все арифметические операции на множестве действительных чисел R являются алгебраическими операциями.

4. На множестве геометрических векторов V операции – сложение, вычитание, векторное умножение являются бинарными алгебраическими операциями; умножение вектора на число – унарной алгебраической операцией.

Операция $*$ на множестве X называется коммутативной, если

$$\forall a,b\in X \quad a*b=b*a.$$

Операция $*$ называется ассоциативной, если

$$\forall a,b,c\in X \quad (a*b)*c=a*(b*c).$$

Пример.

Операция сложения на множестве геометрических векторов V является и ассоциативной, и коммутативной; операция вычитания на этом же множестве – неассоциативная и некоммутативная операция.

Алгебраическая структура

Определение.

Алгебраическая структура – система, состоящая из множества элементов X и операций $f_1, f_2,..., f_n$, определенных на X. Употребляют обозначение: $(X; f_1, f_2,..., f_n)$.

Группоид **–** алгебраическая структура, определяемая одной бинарной операцией.

Группоид называется **коммутативным**, если бинарная операция коммутативна.

Полугруппа – группоид, операция которого ассоциативна, т.е.

$$\forall a,b,c\in X \ (a*b)*c=a*(b*c).$$

Элемент e группоида $(X;\cdot)$ называется **нейтральным** (единичным или единицей), если $\forall a \in X \;\; ae = ea = a$.

Элемент θ группоида $(X;\cdot)$ называется **нулевым** (нулем), если $\forall a \in X \;\; a\theta = \theta a = a$.

Полугруппа $(X;\cdot)$ с единицей e называется **группой**, если $\forall a \in X \;\; \exists b \in X : ab = ba = e$, при этом b называется **обратным элементом** для элемента a.

Коммутативная группа чаще называется **абелевой**. В абелевой группе операцию обычно называют **сложением**, нейтральный элемент – **нулем** и обратный элемент – **противоположным элементом**.

Примеры.

1. $(N;+)$, $(N;\cdot)$ – коммутативные полугруппы.
2. $(Z;+)$, $(R;+)$ – абелевы группы
3. $(Z;\cdot)$ – коммутативная полугруппа с единицей, но не группа.

Кольцо

Кольцо – алгебраическая структура K с двумя бинарными операциями, одна из которых называется сложением $(+)$, другая – умножением $(\cdot)$, при этом должны выполняться следующие условия:

1. $\forall a,b\in K \quad (a+b)=(b+a)$
2. $\forall a,b,c\in K \quad a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\exists!\theta\in K \quad \forall a\in K \quad a+\theta=\theta+a$
4. $\forall a\in K \quad \exists!(-a)\in K \quad a+(-a)=(-a)+a=\theta$
5. $\forall a,b,c\in K \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
6. $\forall a,b,c\in K \quad (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$

Заметим, что $(K;+)$ – абелева группа; $(K;\cdot)$ – полугруппа.

Примеры.

1). Z,Q,R – числовые кольца;

2). $P[x]$ – кольцо многочленов от неизвестного x с действительными коэффициентами.

3). Множество функций, определенных на R, с операциями сложения и умножения.

Кольцо называется коммутативным, если операция умножения коммутативна.

Поле

Коммутативное кольцо P, в котором есть единица и любой ненулевой элемент имеет обратный, называется полем.

Перечислим аксиомы поля:

А. Аксиомы сложения.

1. $\forall a,b\in P \quad a+b=b+a;$

2. $\forall a,b,c\in P \quad (a+b)+c=a+(b+c);$

3. $\exists! \theta \in P: \ a+\theta=a;$

4. $\forall a \in P \ \ \exists!(-a) \in P : a+(-a)=\theta$.

Б. Аксиомы умножения:

5. $\forall a,b \in P \quad a \cdot b = b \cdot a;$

6. $\forall a,b,c \in P \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

7. $\forall a \in P \quad e \cdot a = a;$

8. $\forall a,b,c \in P \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c;$

В.

9. $\forall a,b,c \in P \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Бесконечные поля называются числовыми, а их элементы – числами.

Примеры числовых полей.

1) поле рациональных чисел;

2) поле действительных чисел.

Лекция 2. Линейное пространство. Линейная зависимость.

Определение линейного пространства.

Пусть L – непустое множество элементов, P – числовое поле.

L называется линейным пространством над полем P, если на L определены две операции: бинарная – сложение, т.е. указан закон (правило), по которому любой упорядоченной паре $x, y \in L$ ставится в соответствие единственный элемент из L, называемый суммой и обозначаемый $x+y$, и унарная операция – умножение элемента из L на число из P, т.е. указан закон (правило), по которому каждому элементу x из L и любому числу α из P поставлен в соответствие единственный элемент из L, называемый произведением элемента на число и обозначаемый $\alpha \cdot x$, которые постулируются следующими аксиомами:

I. По сложению L – абелева группа:

1). $\forall x, y \in L \quad x+y=y+x;$

2). $\forall x, y, z \in L \quad (x+y)+z=x+(y+z);$

3). $\exists!\, \theta \in L : \forall x \in L \quad x+\theta=x;$

4). $\forall x \in L \quad \exists!(-x) \in L: \; x+(-x)=\theta;$

II. По умножению элемента на число:

5). $\forall x \in L$, $\forall \alpha, \beta \in P \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

6). $\forall x \in L \quad 1 \cdot x = x$ для единицы 1 поля P;

III. Указанные операции связаны законами дистрибутивности:

7). $\forall x \in L$, $\forall \alpha, \beta \in P \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

8). $\forall x, y \in L$, $\forall \alpha \in P \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Примеры.

1. Множество V_3 всех геометрических векторов (направленных отрезков) в трехмерном пространстве с общим началом в некоторой точке пространства с операциями сложения векторов и умножения вектора на число есть л.п. над полем R.

2. Множество $P^{m\times n}$ всех матриц размера $m\times n$ над P с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число из P образует линейное пространство над P.

3. Множество $\{f(x)\}\ x\in X$ всех действительнозначных функций вещественного аргумента, определенных на числовом множестве X с операциями сложения функций и умножения их на вещественные числа есть линейное пространство над R.

Замечания.

1). Элементы линейного пространства будем часто называть векторами.

2). Если числа $\alpha, \beta, \lambda, \dots$, участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то линейное пространство называется вещественным линейным пространством. Если же эти числа берутся из поля комплексных чисел, то л.п. называется комплексным линейным пространством.

Подпространство линейного пространства

Определение. Непустое подмножество M из L называется линейным подпространством в L (обозначение $M \le L$), если оно замкнуто относительно операций в L, т.е.

$\forall x, y \in M \quad x+y \in M$,

$\forall x \in M,\ \forall \alpha \in P \quad \alpha \cdot x \in M$ (в частности $\theta \in M$)

Примеры линейных подпространств

1. $\{\theta\}$ – тривиальное подпространство линейного пространства L.
2. Множество V_2 всех геометрических векторов некоторой плоскости, проходящей через начало координат, – подпространство линейного пространства V_3.

Линейная оболочка

Пусть L – л.п. над P.

Пусть $A=\{a_1, \dots, a_n\}$ – система элементов из L; $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – некоторый набор чисел из P.

Линейной комбинацией элементов $a_1, \dots, a_n$ системы A с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называется элемент вида $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$.

Если $b=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i$, то говорят, что элемент b линейно выражается через элементы $a_1, \dots, a_n$ системы A и обозначается $b \mapsto A$.

Линейные комбинации элементов системы $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ с различными наборами чисел $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ являются различными элементами из L. Из элементов конечной системы элементов можно составить бесконечное множество линейных комбинаций.

Множество всех линейных комбинаций из элементов конечной системы $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ называется линейной оболочкой системы A и обозначается через $\langle A\rangle$ или $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$.

Лемма 1. Линейная оболочка, натянутая на конечное множество элементов $a_1,\dots,a_n$ из A, является линейным подпространством в L.

Лемма 2. Пусть A, B, C – системы элементов из L.

$(A\mapsto B$ & $B\mapsto C) \Rightarrow (A\mapsto C)$.

Эквивалентные системы

Определение. $(A \sim B) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (A\mapsto B$ & $B\mapsto A)$

Свойства эквивалентных систем

1. $A \sim A$

2. $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$

3. $(A \sim B$ & $B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$

Линейная зависимость

Определение линейно зависимой системы элементов

Пусть L – линейное пространство над полем P. Пусть $A=\{a_1,\dots,a_n\}\subset L$.

(A – линейно зависимая система элементов) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ ($\exists$ нетривиальный набор чисел $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\subset P: \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i=\theta$).

Набор чисел $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ называется нетривиальным, если хотя бы одно число в нем не равно нулю.

В противном случае система A называется линейно независимой, т.е. система A называется линейно независимой, если линейная комбинация этих элементов равна нулевому элементу тогда и только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю.

Критерий линейной зависимости

Система $A=\{a_1,\ldots,a_n\}\subset L$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один элемент из A линейно выражается через все остальные ее элементы, т.е.

(A – линейно зависима) $\Leftrightarrow\left(\exists\, j\in\{1,\ldots,n\}: a_j\mapsto A\setminus\{a_j\}\right)$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ – линейно зависимая система элементов из L, т.е.

$\exists$ нетривиальный набор чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ из P:

$$\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_{j-1}a_{j-1}+\alpha_j a_j+\alpha_{j+1}a_{j+1}+\ldots+\alpha_n a_n=\theta.$$

Пусть для определенности $\alpha_j\neq 0$. Тогда

$$\alpha_j a_j=-\alpha_1 a_1-\ldots-\alpha_{j-1}a_{j-1}-\alpha_{j+1}a_{j+1}-\ldots-\alpha_n a_n$$

и $$a_j=-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}a_1-\ldots-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}a_{j-1}-\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}a_{j+1}-\ldots-\frac{\alpha_n}{\alpha_j}a_n,$$

т.е. $a_j\mapsto A\setminus\{a_j\}$.

($\Leftarrow$) Обратное утверждение доказать самостоятельно.

Свойства линейной зависимости

1). Если $B\subseteq A$ и B линейно зависима, то и A линейно зависима.

2). Если $\theta\in A$, то A линейно зависима.

3). Любая подсистема линейно независимой системы элементов A линейно независима.

Бесконечную систему элементов из L назовем линейно зависимой, если линейно зависима хотя бы одна ее подсистема.

Бесконечную систему элементов из L назовем линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема.

Теорема Штейница.

Пусть $A=\{a_i\}_{i=1}^m\subset L$ и $B=\{b_j\}_{j=1}^n\subset L$ линейно независимые системы такие, что $B\mapsto A$. Тогда $n\le m$.

Доказательство (от противного).

Пусть $n>m$. Составим формально для системы B зависимость вида

$\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j=\theta$. (1)

По условию теоремы $B\mapsto A$, т.е. $\forall\, j\in\{1,\dots,n\}$ $\quad b_j=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}a_i$.

Подставим выражение для b_j в равенство (1). Получим $\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}a_i=\theta$ $\Rightarrow$

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\beta_j\alpha_{ij}a_i=\theta$ $\leftrightarrow$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j\alpha_{ij}\right)a_i=\theta$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_{ij}}_{\gamma_i}\right)a_i=\theta$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m}\gamma_i a_i=\theta$.

Так как система A линейно независима, то $\forall\, i\in\{1,\dots,m\}$ $\gamma_i=0$. Это означает, что $\forall\, i\in\{1,\dots,m\}$ $\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij}\beta_j=\theta$.

Получили однородную систему m линейных уравнений с n неизвестными β_i, в которой число неизвестных больше числа уравнений, и поэтому такая система имеет хотя бы одно ненулевое решение $\left(\beta_1^0,\dots,\beta_n^0\right)$.

Тогда зависимость $\sum_{j=1}^{n}\beta_j^0 b_j=\theta$ имеет место при нетривиальном наборе ее коэффициентов, а это означает, что система B – линейно зависима. Пришли к противоречию с условием теоремы. Следовательно, $n\le m$.

Определение.

Пусть система элементов $A\subseteq L$. Подсистема A' системы A называется максимальной линейно независимой системой (МЛНС) в A, если

1) A' линейно независима и

2) $\forall\, a\in A$ система $A'\cup\{a\}$ линейно зависима.

Свойства МЛНС

1). (A' – МЛНС в A) $\Rightarrow$ ($A\mapsto A'$).

2). (A_1 и A_2 – МЛНС в A) $\Rightarrow$ ($|A_1|=|A_2|$, т.е. число элементов систем A_1 и A_2 одинаково).

Определение.

Рангом системы элементов называется количество элементов ее МЛНС.

Обозначается ранг системы A символом $rang(A)$ или более кратко r_A.

По свойству 2) о МЛНС ранг системы не зависит от выбора МЛНС.

Замечания.

1). Ранги эквивалентных систем элементов из L равны.

2). Ранг линейной оболочки $\langle A \rangle$ множества элементов A из L равен рангу множества A.

Лекция 3. Конечномерное линейное пространство. Сумма и пересечение подпространств

Пусть $A \subseteq L$. L – произвольное линейное пространство над числовым полем R.

Система элементов A называется системой образующих (порождающих) пространства L, если $\langle A \rangle = L$.

Линейное пространство, имеющее конечную систему образующих, называется конечномерным.

В дальнейшем будем рассматривать только конечномерные линейные пространства.

Определение. Размерностью линейного пространства L называется число элементов в МЛНС.

Заметим, что все МЛНС линейного пространства состоят из одного и того же числа элементов и размерность линейного пространства обозначается через $\dim L$.

Если $\dim L = n$, то пространство L называется n-мерным и обозначается L_n.

Определение.

Система элементов $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ – базис L_n если

1) $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ линейно независима;

2) $\forall x \in L_n \;\; x \mapsto \{ e_1, \ldots, e_n \}$, т.е. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Пример.

Рассмотрим P^n – арифметическое (координатное) линейное пространство. Его элементами являются арифметические векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n \in P$.

Докажем, что система $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$, где $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $e_i = \left(\underbrace{0, \ldots 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0 \right)$, образует базис P^n.

Составим линейную комбинацию векторов $e_1, \ldots, e_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, приводящую к нулевому элементу:

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \theta \quad \Rightarrow$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \ldots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; \{ e_1, \ldots, e_n \}$ – линейно независимая.

Докажем, что $\forall x \in P^n : \; x \quad \{ e_1, \ldots, e_n \}$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Этот вектор совпадает с вектором $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.

Следовательно, по определению, $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ – базис в P^n.

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ называют естественным базисом.

Свойства конечномерных линейных пространств

Теорема о базисе.

Любую линейно независимую систему конечномерного линейного пространства можно дополнить до его базиса.

Следствие 1. В n-мерном пространстве любая система из $(n+1)$ элементов линейно зависима.

Следствие 2. В n-мерном пространстве любую линейно независимую систему из n элементов можно принять за базис этого пространства.

Теорема о единственности разложения элемента по базису.

Если $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис в L_n, то любой элемент из L_n единственным образом линейно выражается через элементы этого базиса.

Теорема об арифметике координат.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис в L_n; $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = (e_1, \ldots, e_n) X$; $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i = (e_1, \ldots, e_n) Y$, тогда

1). При сложении элементов их соответствующие координаты складываются.

2). При умножении элемента на число, его каждая координата умножается на это число.

В дальнейшем для L_n над полем вещественных чисел R – R_n – n-мерное вещественное (векторное) пространство; элементы его будем называть векторами; для L_n над полем комплексных чисел C – C_n – n-мерное комплексное (векторное) пространство.

Для L_n над произвольным числовым полем P – P_n или L_n.

Сумма и пересечение подпространств

Определение. Суммой $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ линейных подпространств $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ называется множество всех векторов вида $x=a+b$, где $a\in\mathbf{L}_1$, $b\in\mathbf{L}_2$, т.е.

$$\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2=\left\{\, x\in L\ :\ x=a+b,\ a\in\mathbf{L}_1,\ b\in\mathbf{L}_2 \,\right\}.$$

Определение. Пересечением $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2$ линейных подпространств $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ называется множество всех векторов, одновременно принадлежавших как $\mathbf{L}_1$, так и $\mathbf{L}_2$.

Замечания.

1). Сумма и пересечение подпространств всегда являются непустыми множествами, так как им заведомо принадлежит нулевой вектор пространства L.

2). Сумма и пересечение подпространств являются линейными подпространствами.

Теорема о размерности суммы подпространств.

Для произвольных двух конечномерных подпространств $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ имеет место равенство

$$\dim\left(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2\right)=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2-\dim\left(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2\right).$$

Определение. Сумма $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ подпространств $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ называется ***прямой*** и обозначается $\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2$, если $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2=\left\{\theta\right\}$.

Теорема.

$$\left(\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\forall\, x\in\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2\quad \exists!\, a\in\mathbf{L}_1,\ \exists!\, b\in\mathbf{L}_2 : x=a+b\right).$$

Замечание. Если $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ – конечномерные подпространства, то $\dim\left(\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2\right)=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2$ (по теореме о размерности суммы подпространств).

Теорема.

Для того чтобы л.п. L_n было прямой суммой своих подпространств необходимо и достаточно, чтобы объединение базисов этих подпространств составляло базис всего пространства.

Лекция 4. Преобразование координат. Ранг матрицы

Преобразование координат

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в L_n, пусть вектор $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Вектору x поставим в соответствие координатный столбец $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Вектору $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ поставим в соответствие координатный столбец $Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Координатный столбец суммы векторов $x + y$ равен сумме координатных столбцов $X + Y$ и координатный столбец λx равен λX.

Пусть $(e'_1, \dots, e'_n)$ – другой базис L_n (назовем его новым, а базис $(e_1, \dots, e_n)$ будем называть старым). Тогда $x = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n \leftrightarrow X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$. Выясним, как связаны между собой координатные столбцы X и X'.

Чтобы ответить на этот вопрос, выразим векторы нового базиса через векторы старого базиса:

$$e'_1 = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n,$$

$$e'_2 = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \dots + t_{n2} e_n, \quad (1)$$

$$e'_n = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n.$$

Матрицу $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = \left(t_{ij} \right)_{n,n}$ называют матрицей перехода от старого базиса к новому – матрицей прямого перехода.

Равенства (1) можно записать в матричном виде

$$\boxed{(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, T}.$$

Пусть S – матрица перехода от нового базиса к старому – матрица обратного перехода, т.е. $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)\, S'$. Тогда $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)\, T\, S \Rightarrow T\, S = E$.

Или $(e'_1, \dots, e'_n) = (e'_1, \dots, e'_n)\, S\, T \Rightarrow S\, T = E$.

$TS = ST = E \Rightarrow$ матрицы перехода T и S – обратимые матрицы, причем $T^{-1} = S$, $S^{-1} = T$.

Формулы преобразования координат при переходе от старого (первого) базиса к новому (второму) базису.

Пусть $x = (e_1, \ldots, e_n)\, X$, $x = (e_1', \ldots, e_n')\, X'$.

Тогда $(e_1', \ldots, e_n')\, X' = (e_1, \ldots, e_n)\, X$ или $(e_1', \ldots, e_n')\, X' = (e_1', \ldots, e_n')\, S\, X \Rightarrow X' = S\, X$ или

$\boxed{X' = T^{-1} X}$, (2)

где T – матрица перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e_1', \ldots, e_n')$.

При переходе от базиса $(e_1', \ldots, e_n')$ к базису $(e_1, \ldots, e_n)$ имеем

$\boxed{X = T\, X'}$. (3)

Формулы (2) – (3) называются формулами преобразования координат вектора.

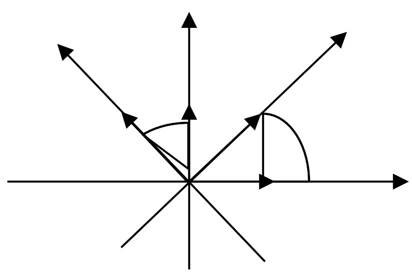
Пример. В плоскости даны два базиса: $(\vec{i}, \vec{j})$ и $(\vec{i}', \vec{j}')$, причем $(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) = \varphi$, $(\widehat{\vec{j}, \vec{j}'}) = \varphi$.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор плоскости:

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \leftrightarrow X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Найдем формулы преобразования координат – формулы связи между координатами вектора $\vec{x}$ в двух различных базисах.



Решение. $\begin{aligned}\vec{i}' &= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\\ \vec{j}' &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\end{aligned} \Rightarrow T = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = T\cdot\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,\\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,\\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.\end{cases}$$

Ранг матрицы

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$ – произвольная матрица;

$\forall\, i \in \{1, \dots, m\}$ $x_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\right)$ – вектор-строка;

$\forall\, j \in \{1, \dots, n\}$ $y_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\right)^T$ – вектор-столбец.

Определение. Строчным рангом матрицы A назовем ранг системы ее векторов-строк $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и обозначим через $r_c(A)$.

Определение. Столбцовым рангом матрицы A назовем ранг системы ее векторов-столбцов (колонок) и обозначим через $r_k(A)$.

Теорема об инвариантности рангов матрицы.

При любых элементарных преобразованиях матрицы оба ее ранга (строчный и столбцовый) не меняются.

Теорема о ранге матрицы.

Для любой матрицы ее строчный и столбцовый ранги совпадают.

Их общее значение называют рангом матрицы и обозначают $r(A)$.

Следствие. Если A – квадратная матрица n-го порядка, то $r(A) = n \;\Leftrightarrow\; |A| \neq 0$.

Алгоритм поиска ранга матрицы

1). Привести матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду так, чтобы все ее элементы с одинаковыми индексами были отличны от нуля (кроме нулевых строк).

2). Найти число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы – это и будет ранг искомой матрицы.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&3&1&-1\\3&2&1&1\\-1&-4&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&5&1&-5\\0&5&1&-5\\0&-5&-1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&5&1&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\quad r(A)=2.$$

Базисный минор матрицы

Пусть A – матрица ранга r. Тогда матрица имеет r линейно независимых (базисных) строк и r линейно независимых (базисных) столбцов.

Минор, составленный из элементов на пересечении этих строк и столбцов, называется базисным.

В предыдущем примере базисный минор, например,

$$m_3=\begin{vmatrix}1&-1\\2&3\end{vmatrix}\text{ или }\begin{vmatrix}-1&0\\3&1\end{vmatrix}.$$

Теорема о базисном миноре.

Любой базисный минор матрицы отличен от нуля, а все миноры матрицы более высокого порядка равны нулю. Имеет место обратная теорема.

Следствие.

Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбцы (строки) линейно зависимы.

Лекция 5. Евклидовы и унитарные пространства

Скалярное произведение в вещественном линейном пространстве

Говорят, что в линейном пространстве L над полем R определено скалярное произведение, если любой упорядоченной паре $x, y \in L$ по некоторому правилу поставлено в соответствие *вещественное число*, которое обозначается через (x, y) (иными словами, отображение $(\ ,\ ): L \times L \to R$) и при этом выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1). $\forall x, y \in L \quad (x, y) = (y, x)$;

2). $\forall x, y \in L, \ \forall \lambda \in R \quad (\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda (x, y)$;

3). $\forall x, y, z \in L \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4). $\forall x \in L \quad (x, x) \geq 0 \ \& \ (x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta.$

Вещественное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется евклидовым пространством и обозначается буквой E.

Пример.

$\langle V_3; (\ ,\ ) \rangle$, в котором $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ – 3-мерное евклидово пространство геометрических векторов.

Некоторые метрические понятия в евклидовом пространстве

1). ***Норма*** (длина) элемента:

$$\| x \| \overset{\Delta}{=} \sqrt{(x, x)}.$$

Свойства нормы:

а) $\forall x \in \mathrm{E} \quad \| x \| \geq 0 \ \& \ \| x \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta$.

б) $\forall x \in \mathrm{E}, \ \lambda \in R \quad \| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$.

в) $\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

2). ***Метрика*** (расстояние) элементов:

$$d(x, y) \overset{\Delta}{=} \| x - y \| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Свойства метрики:

а) $\forall\, x, y \in \mathrm{E} \quad d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$;

б) $\forall\, x, y \in \mathrm{E} \quad d(x, y) = d(y, x)$;

в) $\forall\, x, y, z \in \mathrm{E} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

3). ***Угол между элементами:***

$$\widehat{(x, y)} = \varphi \in [0, \pi],$$

который определяется по формуле

$$\cos\widehat{(x, y)} = \cos\varphi \overset{\Delta}{=} \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (x \neq \theta,\ y \neq \theta).$$

Это определение вполне корректно, так как $|\cos\varphi| = \dfrac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$, что следует из неравенства Коши-Буняковского, о котором будет сказано позже.

В евклидовом пространстве можно определить ***ортогональность*** элементов:

$$(\, x \perp y\,) \ \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \ (\,(x, y) = 0\,).$$

Замечание. Понятие ортогональности есть обобщение понятия перпендикулярности геометрических векторов, что следует из определения угла между векторами.

Некоторые метрические соотношения в E

1). ***Неравенство Коши-Буняковского***:

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Доказательство. $\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in R$ имеем $(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0$ (по четвертой аксиоме скалярного произведения). Это неравенство преобразуем к следующему виду:

$$\lambda^2 (x, x) - 2\lambda (x, y) + (y, y) \geq 0.$$

В левой части неравенства стоит квадратный трехчлен относительно λ, который принимает неотрицательные значения при любом $\lambda \in R$. Если $x = \theta$, то неравенство очевидно, если $x \neq \theta$, то $(x, x) > 0$, что влечет за собой неположительность его дискриминанта, т.е.

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \quad \Leftrightarrow \ |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

2). ***Неравенство Минковского***:

$\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \| x+y \| \le \| x \| + \| y \|$.

Доказательство. $\forall x, y \in \mathrm{E} \quad (x+y, x+y) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,x)+2(x,y)+(y,y) \ge 0$. Так как $(x,y) \le |(x,y)| \le \| x \| \cdot \| y \|$, то $(x+y, x+y) \le \| x \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2$, $\| x+y \|^2 \le (\| x \| + \| y \|)^2$, $\| x+y \| \le \| x \| + \| y \|$.

3). ***Теорема Пифагора***:

$(x \perp y) \;\Rightarrow\; \left(\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2\right)$.

Скалярное произведение в комплексном линейном пространстве

Пусть L – линейное пространство над полем C.

Отображение $(\ ,\ ): L \times L \to C$ называется скалярным произведением в L, если $\forall x, y, z \in L,\ \forall \lambda \in C$:

1). $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2). $(\lambda x, y) = \lambda (x, y); \quad (x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$;

3). $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$,

4). $(x,x) \ge 0 \ \& \ (x,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta$.

Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется унитарным пространством и обозначается буквой U.

В унитарном пространстве вводится норма $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$, метрика – $d(x,y) = \| x-y \|$, имеет место неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами в унитарном пространстве не вводится, однако ортогональность векторов определяется $x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = 0$.

Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов

Пусть в U_n задан произвольный фиксированный базис $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ и пусть элементы $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varepsilon_j$.

Тогда $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$.

Обозначив $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = g_{ij}$, будем иметь

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i \overline{\beta}_j g_{ij}.$$

Матрица $(g_{ij})_{n,n}$ называется матрицей Грама в базисе $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ и обозначается буквой G.

Итак, матрица Грама базисных элементов $G(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = (g_{ij})_{n,n}$ задает скалярное произведение в этом базисе.

Скалярное произведение элементов x и y в базисе $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ можно переписать в матричной форме:

$$(x, y) = X^T G \overline{Y},$$

где $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Замечание. В евклидовом пространстве E_n скалярное произведение элементов x и y в произвольном базисе $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ равно $(x, y) = X^T G Y$.

Теорема о необходимых и достаточных условиях линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве

($A = \{a_1,\dots,a_k\} \subset \mathrm{E}_n$, A – линейно зависима) $\Leftrightarrow$ $(\det G(a_1,\dots,a_k) = 0)$.

($\Rightarrow$) $A = \{a_1,\dots,a_k\}$ – линейно зависимая система элементов, т.е. существует нетривиальный набор чисел $(\alpha_1,\dots,\alpha_k) \subset R$: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$.

Умножая это равенство скалярно на элемент a_i, $i = \overline{1, k}$, получаем систему равенств:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_1\, a_k) = 0, \\ \alpha_1(a_2, a_1) + \dots + \alpha_k(a_2\, a_k) = 0, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k\, a_k) = 0. \end{cases}$$

Рассматривая эту систем относительно $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, имеем однородную систему k линейных уравнений, у которой есть ненулевое решение. А это означает, что определитель СЛУ равен нулю, т.е.

$$\left|G\left(a_1,\ldots,a_k\right)\right| = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \ldots & (a_1,a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k,a_1) & \ldots & (a_k,a_k) \end{vmatrix} = 0$$
.

В противном случае СЛУ имела бы только нулевое решение и система A была бы линейно независимой, что противоречило бы условию теоремы.

($\Leftarrow$ **)** Пусть определитель матрицы Грама системы A равен нулю, т.е.

$$\left|G\left(a_1,\ldots,a_k\right)\right| = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \ldots & (a_1,a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k,a_1) & \ldots & (a_k,a_k) \end{vmatrix} = 0$$

. Равенство нулю определителя означает линейную зависимость строк (столбцов) матрицы Грама G, т.е. $\exists$ нетривиальный набор чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \subset R$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} (a_1,a_1) \\ \ldots \\ (a_k,a_1) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} (a_1,a_2) \\ \ldots \\ (a_k,a_2) \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_k \begin{pmatrix} (a_1,a_k) \\ \ldots \\ (a_k,a_k) \end{pmatrix} = \theta$$
.

Отсюда имеем систему равенств

$$\begin{cases} \alpha_1\left(a_1,a_1\right) + \ldots + \alpha_k\left(a_1\, a_k\right) = 0, \\ \alpha_1\left(a_2,a_1\right) + \ldots + \alpha_k\left(a_2\, a_k\right) = 0, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\left(a_k,a_1\right) + \ldots + \alpha_k\left(a_k\, a_k\right) = 0 \end{cases}$$

или $\forall\, i \in \{1,k\}\ \ (a_i, \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k) = 0$.

Умножая его на α_i и суммируя по i от 1 до k, получаем $(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k, \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k) = 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$. Так как не все $\alpha_i \left(i = \overline{1,k}\right)$ равны нулю, то из последнего равенства следует линейная зависимость системы элементов A.

Следствие.

($A = \{a_1,\ldots,a_k\}$ – линейно независимая) $\Leftrightarrow$ $\left(\det G\left(a_1,\ldots,a_k\right) \neq 0\right)$.

Замечание. Теорема имеет место для унитарного пространства.

Лекция 6. Строение унитарного (евклидова) пространства.

Ортогональная система элементов. Свойства

Определение. Пусть $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ – система элементов унитарного (евклидова) пространства U.

(A – ортогональная система элементов (ОС)) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $\left(\forall i, j \in \{1, \dots, k\} \quad (a_i, a_j)=0,\ i \neq j\right)$.

Теорема.

($A=\{a_1, \dots, a_k\}$ – ОС ненулевых элементов) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (A – линейно независимая система).

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = \theta$. Умножим это равенство скалярно на a_j, $j \in \{1, \dots, k\}$, т.е. $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i a_j\right) = (\theta, a_j) \Rightarrow \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, a_j\right) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (a_i, a_j) = 0$.

В силу ортогональности системы A все $(a_i, a_j)=0$ при $i \neq j$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (a_i, a_j) = \alpha_j \underbrace{(a_j, a_j)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$. А это означает, что $A=\{a_1, \dots, a_k\}$ – линейно независимая система.

Теорема.

Пусть $A=\{a_1, \dots, a_k\} \subset U$ и $b \in U$.

$\left(\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad a_i \perp b\right) \Rightarrow \left(\forall \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \perp b\right)$.

Доказательство. $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, b\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{(a_i, b)}_{=0,\, т.к.\, a_i \perp b} = 0$.

Замечание. Если элемент b ортогонален каждому элементу из $L=\langle a_1, \cdots, a_k \rangle$, то говорят, что b ортогонален подпространству L и записывают $b \perp L$.

Нормированность элемента

Определение. Элемент $a \in U$ называется нормированным, если его норма $\|a\|=1$.

Утверждение. Любой ненулевой элемент a можно нормировать, умножив его на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Действительно, по условию нормировки элемента

$$\|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{\|a\|}.$$

$\lambda = \pm \dfrac{1}{\sqrt{(a,a)}}$ – нормирующий коэффициент.

Определение. Система $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ называется ортонормированной (ОНС), если $\forall i,\ j \in \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$

$$(a_i, a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Матрица Грама векторов ОНС равна единичной матрице.

Определение. Базис в унитарном (евклидовом) пространстве называется ортонормированным (ОНБ), если его элементы образуют ортонормированную систему.

В ОНБ $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства U_n скалярное произведение векторов x и y равно $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = (e_1, \ldots, e_n) X$, $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j = (e_1, \ldots, e_n) Y$.

В ОНБ евклидова пространства E_n скалярное произведение векторов x и y равно $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = X^T Y$.

Теорема о существовании ОНБ.

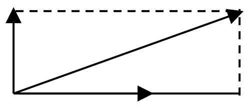
В унитарном (евклидовом) n-мерном пространстве существует ОНБ.

Доказательство. Достаточно построить в U_n ортогональный базис. Для этого применим так называемый процесс ортогонализации.

Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис в U_n.

Ортогональный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в U_n будем строить так, чтобы $e_i \mapsto (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$ для $1 \leq i \leq n$.

Пусть $e_1 = \varepsilon_1$. Вектор e_2 будем искать в виде линейной комбинации $e_2 = \varepsilon_2 + \lambda_{21} e_1$. Для геометрических векторов можно построить $e_2 \perp e_1$, положив $e_2 = \varepsilon_2 - \frac{e_1}{|e_1|} \cdot \text{пр}_{e_1} \varepsilon_2$.



Для абстрактного пространства число λ_{21} подберем так, чтобы $(e_2, e_1) = 0$, т.е. $(\varepsilon_2 + \lambda_{21} e_1, e_1) = 0 \Rightarrow (\varepsilon_2, e_1) + \lambda_{21}(e_1, e_1) = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{(\varepsilon_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$, причем $e_2 \;\; \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Допустим, что попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ уже построены. Вектор e_k ищем в виде $e_k = \varepsilon_k + \lambda_{k1} e_1 + \ldots + \lambda_{k\,k-1} e_{k-1}$.

Коэффициенты $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{k\,k-1}$ находим из условия ортогональности вектора e_k к векторам $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$, т.е.

$$\left(\varepsilon_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} e_i, e_j\right) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$ Отсюда

$$(\varepsilon_k, e_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki}(e_i, e_j) = 0 \Rightarrow (\varepsilon_k, e_j) + \lambda_{kj}(e_j, e_j) = 0 \Rightarrow \lambda_{kj} = -\frac{(\varepsilon_k, e_j)}{(e_j, e_j)}, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Этот процесс не может оборваться ни при каких $k < n$. Это могло бы быть, если $e_k = \theta$. Докажем, что $e_k \neq \theta$.

Заметим предварительно, что e_k есть линейная комбинация векторов $e_1, \dots, e_{k-1}, \varepsilon_k$, т.е. $e_k = \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} e_i$ и $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ $e_i \;\; \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i\}$.

Следовательно, $e_k \dashv \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. Окончательно, мы получаем, что вектор $e_k = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \varepsilon_{k-1} + 1 \cdot \varepsilon_k$.

Теперь ясно, что $e_k \neq \theta$. В противном случае система $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k}$ линейно зависима, так как $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, 1)$ нетривиальная система коэффициентов, что не может быть в силу их линейной независимости.

Продолжая этот процесс до тех пор, пока не будут исчерпаны заданные векторы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, получаем n отличных от нуля и попарно ортогональных векторов $e_1, \dots, e_n$. Эта система векторов линейно независима и образует ортогональный базис пространства. Далее, нормируя каждый элемент этой системы, получаем ОНБ.

Пример. $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,0,1)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1) \in R^3$ и образуют в R^3 базис. Построить ОНБ, применяя процесс ортогонализации.

Решение. $e_1 = \varepsilon_1 = (1,1,1)$.

$e_2 = \varepsilon_2 + \lambda_{21} e_1$; $\lambda_{21} = -\dfrac{(\varepsilon_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\dfrac{(1,0,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\dfrac{2}{3}$;

$$e_2 = (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$e_3 = \varepsilon_3 + \lambda_{31} e_1 + \lambda_{32} e_2$;

$$\lambda_{31} = -\frac{(\varepsilon_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{(0,0,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\frac{1}{3};$$

$$\lambda_{32} = -\frac{(\varepsilon_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{(0,0,1)\cdot\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{2};$$

$$e_3 = (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Система $\begin{cases} e_1 = (1,1,1), \\ e_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ e_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ образует ортогональный базис в R^3.

Нормируя каждый вектор ОНБ, т.е.

$\| e_1 \| = \sqrt{3}$, $\| e_2 \| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\| e_3 \| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{e_1}{\| e_1 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{e_2}{\| e_2 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\dfrac{e_3}{\| e_3 \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, получим ОНБ в R^3.

Ортогональное дополнение

Пусть $L \le U$, U – унитарное (евклидово) пространство.

Определение. Множество $L^{\perp}$ элементов пространства называется ортогональным дополнением к подпространству L, если каждый элемент из $L^{\perp}$ ортогонален L.

Пример. Рассмотрим пространство V_3. Плоскость $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ является его подпространством. Подпространство $\langle \vec{k} \rangle$ есть ортогональное дополнение к $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$.

Теорема. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к подпространству L является линейным подпространством в U.

Теорема об ортогональном разложении унитарного (евклидова) пространства U_n

Всякое унитарное (евклидово) пространство U_n является прямой суммой своего подпространства и ортогонального дополнения к нему.

Доказательство. Пусть $L_k \subset U_n$, $\dim L_k = k$, $k < n$. Пусть $(e_j)_{j=1}^{k}$ – ортогональный базис в L_k. Дополним его до базиса пространства U_n.

Применяя к этому базису процесс ортогонализации, получим векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$, дополняющие ортогональную систему $e_1, \dots, e_k$ из L до ортогонального базиса в U_n, причем векторы $e_{k+1}, \dots, e_n \in L_k^{\perp}$. Если хотя бы один из них принадлежал L_k, то $\dim L_k > k$, что не может быть. Тогда $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle = L_k^{\perp}$ и, следовательно, $U_n = L_k \oplus L_k^{\perp}$ (по теореме о разложении $L_n = L_1 \oplus L_2$).

Лекция 7. Линейный оператор и его матрица

Определение. Отображение линейного пространства в линейное пространство называется оператором.

Например, $f: R \to R$ – оператор (f – числовая функция).

Определение линейного оператора

Пусть L и L' – два линейных пространства над одним и тем же числовым полем P; $\mathbf{A}$ – оператор, действующий из L в L', т.е. $\forall x \in L$ поставлен в соответствие $y = \mathbf{A}x \in L'$, где x – прообраз оператора $\mathbf{A}$, $y = \mathbf{A}x$ – образ A.

Определение.

$$(\mathbf{A} \text{ – линейный оператор}) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1^0.\ \forall x_1, x_2 \in L \quad \mathbf{A}(x_1 + x_2) = \mathbf{A}x_1 + \mathbf{A}x_2, \\ 2^0.\ \forall x \in L, \forall \lambda \in P \quad \mathbf{A}(\lambda x) = \lambda \mathbf{A}x. \end{pmatrix}$$

Условия 1^0 – 2^0 в определении называются линейными.

Часто будет рассматриваться случай: $\mathbf{A}: L \to L$, т.е. оператор $\mathbf{A}$ переводит элементы линейного пространства L в элементы этого же пространства. Такой оператор еще называется линейным преобразованием пространства L.

Примеры.

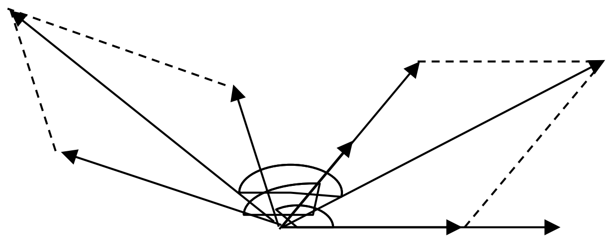
1). Если $X = C^1_{[a,b]}$ – линейное пространство функций, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, то оператор дифференцирования D отображает X в $Y = C_{[a,b]}$.

2). Если $C_{[a,b]}$ – линейное пространство непрерывных функций на $[a, b]$, то оператор интегрирования J отображает $C_{[a,b]}$ в R – линейное пространство вещественных чисел.

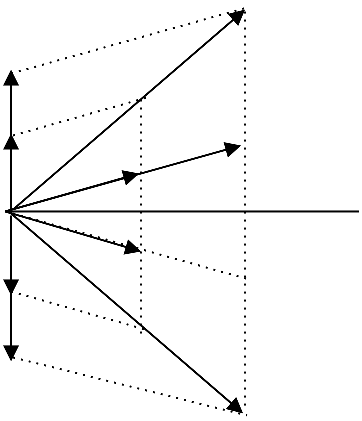
3). Рассмотрим трехмерное евклидово пространство R^3 и в нем преобразование, состоящее в повороте R^3 вокруг какой-либо оси, проходящей через нуль. Каждому вектору x ставится в соответствие вектор $\mathbf{A}x$, полученный из него данным поворотом.

4). Пусть R^2 – некоторая плоскость в трехмерном пространстве R^3, проходящая через нуль. Поставим в соответствие каждому x его проекцию $x' = \mathbf{A}x$ на эту плоскость.

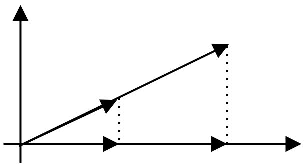
5). Преобразование $\mathbf{A}: R^2 \to R^2$: поворот плоскости вокруг неподвижной точки O (начало координат):



6). Преобразование $\mathbf{A}: R^2 \to R^2$: зеркальное отражение относительно прямой, проходящей через начало координат:



7). Преобразование $\mathbf{A}: R^2 \to R^2$: проектирование R^2 на прямую, проходящую через начало координат:



Матрица линейного оператора

Пусть $\mathbf{A}: L_n \to L'_m$.

Зафиксируем в пространствах L_n и L'_m базисы $(e_1, \dots, e_n)$ в L_n и $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ в L'_m.

Если задан оператор, действующий из L_n в L'_m, это значит, что задан закон (правило), по которому

$\forall x \in L_n \quad \exists!\, y \in L'_m \;:\; y = \mathbf{A}x$.

Пусть $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varepsilon_i$. Тогда

$y = \mathbf{A}x = \mathbf{A}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{A} e_j$ (в силу линейности оператора).

Отсюда видно, что для задания оператора $\mathbf{A}$ достаточно задать только образы базисных элементов пространства L, т.е.

1) $\mathbf{A}$ вполне определяется заданием образов базисных элементов;
2) координаты образа любого элемента определяются координатами образов базисных элементов.

Пусть образы базисных элементов $e_1, \dots, e_n$, которые являются элементами пространства L'_m, разложены по базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$:

$$\mathbf{A}e_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \ldots + a_{m1}\varepsilon_m = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}e_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \ldots + a_{m2}\varepsilon_m = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},$$

…

$$\mathbf{A}e_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \ldots + a_{mn}\varepsilon_m = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то эту систему равенств можно записать в виде одного матричного равенства

$$\boxed{(\mathbf{A}e_1, \mathbf{A}e_2, \dots, \mathbf{A}e_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)A}.$$

В силу единственности разложения элемента по базису каждому оператору $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$ при фиксированных базисах будет таким образом поставлена в соответствие матрица $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$. Эта матрица называется матрицей линейного оператора A.

Теорема о матрице линейного оператора

Пусть $\mathbf{A}: L_n \to L'_m$, где $\mathbf{A}$ – произвольный линейный оператор; $\left(e_1,\dots,e_n\right)$ – базис в L_n; $\left(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\right)$ – базис в L'_m. Тогда множество линейных операторов $\mathbf{A}: L_n \to L'_m$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством матриц A $m\times n$ над полем P:

$$\boxed{\mathbf{A}: L_n \to L'_m \quad \leftrightarrow \quad A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}}.$$

Доказательство.

Известно, что каждому оператору, действующему из L_n в L'_m, при фиксированных базисах в L_n и L'_m ставится в соответствие матрица $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$. Покажем, что это соответствие взаимно однозначное.

Пусть дана матрица $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ над полем P и

$$\forall\, j\in\{1,\dots,n\} \qquad \mathbf{A}e_j=\left(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\right)\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

т.е. образами базисных элементов $e_1,\dots,e_n$ являются элементы $\mathbf{A}e_j=\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_i$.

Образом произвольного элемента $x=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$ является элемент

$$\mathbf{A}x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{A}e_j \qquad (2).$$

Докажем, что оператор $\mathbf{A}: L_n \to L'_m$, определенный по правилу (1) – (2), – линейный.

Действительно, полагая $y=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j e_j$, имеем

$$\mathbf{A}\left(\lambda x+\mu y\right)=\mathbf{A}\left(\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j+\mu\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\right)=\mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda\alpha_j e_j+\sum_{j=1}^{n}\mu\beta_j e_j\right)=$$

$$=\mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j\right)e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j\right)\mathbf{A}e_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda\alpha_j\mathbf{A}e_j+\mu\beta_j\mathbf{A}e_j\right)=$$

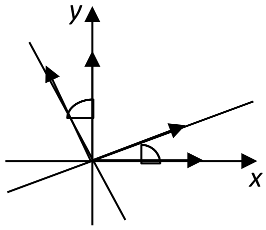
$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{A} e_j + \mu \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{A} e_j = \lambda \mathbf{A} x + \mu \mathbf{A} y$$.

Примеры.

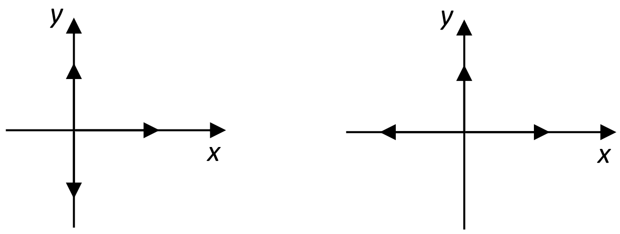
Рассмотрим линейные преобразования плоскости R^2 и найдем их матрицы в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

1). Матрица оператора поворота на угол φ

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}\vec{i} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}; \\ \mathbf{A}\vec{j} = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j} \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$



2). Матрица зеркального отражения относительно координатных осей



В первом случае, $\mathbf{A}\vec{i} = \vec{i}$, $\mathbf{A}\vec{j} = -\vec{j} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Во втором случае, $\mathbf{A}\vec{i} = -\vec{i}$, $\mathbf{A}\vec{j} = \vec{j} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3). Матрица проектирования на координатные оси Ox и Oy.

В первом случае, $\mathbf{A}\vec{i} = \vec{i}$, $\mathbf{A}\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Во втором случае, $\mathbf{A}\vec{i} = \vec{0}$, $\mathbf{A}\vec{j} = \vec{j} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Лекция 8. Выражение координат образа через координаты прообраза. Связь матриц оператора в разных базисах. Связь координат образа и координат прообраза

Теорема. Пусть $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$ – линейный оператор, $(e_1, \dots, e_n)$ – фиксированный базис в L_n, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ – фиксированный базис в L'_m. Пусть X – координатный столбец произвольного элемента $x \in L_n$ в базисе $(e_1, \dots, e_n)$, т.е.

$x = (e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$; Y – координатный столбец $y = \mathbf{A}x$ в базисе $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, т.е.

$y = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $\boxed{Y = AX}$, где A – матрица линейного оператора $\mathbf{A}$.

Доказательство. В силу линейности оператора $\mathbf{A}$

$$y = \mathbf{A}x = \mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{A} e_j = (\mathbf{A}e_1, \dots, \mathbf{A}e_n) X = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) AX .$$

С другой стороны, $y = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) Y$.

Тогда $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) Y = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) AX$.

В силу единственности разложения элемента по базису имеем

$$\boxed{Y = AX} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n. \end{cases} \quad (3)$$

Итак, оператор $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$ может быть записан формулами (3).

Связь матриц линейного оператора при изменении базиса

Теорема. Пусть оператор $\mathbf{A} : L_n \to L_n$ имеет в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ матрицу A, а в базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$ – матрицу A'. Пусть T – матрица перехода от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \dots, e'_n)$. Тогда $A' = T^{-1}AT$.

Доказательство. Для произвольного элемента $x \in L_n$ и его образа $y = \mathbf{A}x \in L_n$ имеем

$x = (e_1, \dots, e_n) X$, $x = (e'_1, \dots, e'_n) X'$, $y = (e_1, \dots, e_n) Y$,

$y=(e_1',\dots,e_n')Y'$; $X=TX'$, $Y'=T^{-1}Y$ (4)

– формулы преобразования координат элемента x при переходе от одного базиса к другому базису.

Требуется выразить матрицу A' через матрицы A и T. Для этого заменим в правой части формулы (4) Y на AX (см. формулу (3)), X на TX', получим $Y'=T^{-1}Y=T^{-1}AX=T^{-1}ATX'$. С другой стороны имеем $Y'=A'X'$ по формулам (3) выражения координат образа через координаты прообраза. В силу единственности представления координат образа через координаты прообраза оператора в фиксированном базисе имеем

$\boxed{A'=T^{-1}AT}$.

Пример. Линейный оператор $\mathbf{A}: R_3\to R_3$ в базисе (e_1,e_2,e_3) имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого же оператора в базисе: $e_1'=e_1$; $e_2'=e_1+e_2$; $e_3'=e_1+e_2+e_3$.

Решение. Обозначим матрицу оператора $\mathbf{A}$ в базисе (e_1',e_2',e_3') через A' Тогда $A'=T^{-1}AT$, где T – матрица перехода от первого базиса (e_1,e_2,e_3) ко второму базису (e_1',e_2',e_3'), имеет вид $T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Матрицу обратного перехода T^{-1} можно найти по формуле обращения матрицы или методом Гаусса: $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$A'=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&0&-1\\-2&-3&-3\end{pmatrix}.$$

Подобные матрицы

Определение. Две квадратные матрицы A и B одного и того же порядка называются подобными, если существует такая обратимая матрица T, что $B=T^{-1}AT$.

Теорема об условиях подобия матриц

Две матрицы подобны тогда и только тогда, когда они в разных базисах соответствуют одному и тому же линейному оператору, действующему в одном пространстве.

Свойства подобных матриц A и B.

1). $Det\ A = Det\ B$.

2). $tr\ A = tr\ B$.

3). $r(A) = r(B)$.

Лекция 9. Образ и ядро, ранг и дефект линейного оператора. Алгебра операторов

Образ и ранг линейного оператора

Определение. Пусть оператор $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$. Множество элементов $y \in L'_m$ вида $y = \mathbf{A}x$, где x пробегает все L_n, называется ***образом*** пространства оператора $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}L$ или $im\,\mathbf{A}$.

Ясно, что $im\,\mathbf{A} \le L'_m$ ($im\,\mathbf{A}$ – линейное подпространство L'_m).

Действительно, если $y_1 = \mathbf{A}x_1$, $y_2 = \mathbf{A}x_2$, то

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 \mathbf{A}x_1 + \alpha_2 \mathbf{A}x_2 = \mathbf{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \mathbf{A}x \in im\,\mathbf{A}.$$

Тогда встает вопрос о размерности $im\,\mathbf{A}$. Число $\dim(im\,\mathbf{A})$ называется рангом оператора $\mathbf{A}$ и обозначается через $r_{\mathbf{A}}$.

Ранг оператора не зависит от выбора базисов в L_n и L'_m.

Теорема. Ранг оператора $\mathbf{A}$ равен рангу его матрицы в любом базисе.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$; $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в L_n, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ – базис в L'_m.

$$\forall\, y \in im\,\mathbf{A} \quad \exists x \in L_n \ : \ y = \mathbf{A}x = \mathbf{A}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{A}e_j$$, т.е. $im\,\mathbf{A} = \langle \mathbf{A}e_1, \dots, \mathbf{A}e_n \rangle$.

Тогда $\dim(im\,\mathbf{A}) = rang\{\mathbf{A}e_1, \dots, \mathbf{A}e_n\}$.

Пусть $A = (a_{ij})_{m,n}$ – матрица оператора $\mathbf{A}$ в заданных базисах. $\{\mathbf{A}e_1, \dots, \mathbf{A}e_n\} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)A$. Отсюда

$rang\{\mathbf{A}e_1, \dots, \mathbf{A}e_n\} = r(A)$, т.е. $\dim(im\,\mathbf{A}) = r_{\mathbf{A}} = r(A)$.

Несмотря на то, что матрица оператора зависит от выбора базисов в L_n и L'_m, ранг матрицы оператора не зависит от выбора базисов, т.е. $r(A) = r(A')$, где $A' = T^{-1}AT$.

В этом случае говорят, что ранг матрицы оператора является его инвариантом.

Следствие. Подобные матрицы имеют одинаковые ранги.

Ядро и дефект линейного оператора

Пусть оператор $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$; $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в L_n; $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ – базис в L'_m; $\mathbf{A} \leftrightarrow A = (a_{ij})_{m,n}$.

Определение. Ядром оператора $\mathbf{A}$ называется множество всех элементов x из L_n, для которых $\mathbf{A}x = \Theta_{L'}$, $\Theta_{L'} \in L'_m$. Обозначается ядро оператора символом $\ker \mathbf{A}$. Таким образом,

$$\ker \mathbf{A} = \{x \in L_n : \mathbf{A}x = \Theta_{L'}, \Theta_{L'} \in L'_m\}.$$

Ясно, что $\ker \mathbf{A} \le L_n$ ($\ker \mathbf{A}$ – линейное подпространство L_n). Действительно $\forall x_1, x_2 \in \ker \mathbf{A},\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in P$

$$\mathbf{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathbf{A}x_1 + \alpha_2 \mathbf{A}x_2 = \alpha_1 \Theta_{L'} + \alpha_2 \Theta'_2 = \Theta_{L'},$$

т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \ker \mathbf{A}$.

Определение. Размерность $\ker \mathbf{A}$ (ядра оператора $\mathbf{A}$) называется дефектом оператора $\mathbf{A}$ и обозначается через $d_{\mathbf{A}}$.

Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Сумма ранга и дефекта линейного оператора $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$ равна размерности пространства $L_n : r_{\mathbf{A}} + d_{\mathbf{A}} = n$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} : L_n \to L'_m$, $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в L_n; $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ – базис в L'_m; $\mathbf{A} \leftrightarrow A = (a_{ij})_{m,n}$; $x \leftrightarrow X$. Тогда $\mathbf{A}x = \Theta \quad \leftrightarrow \quad AX = \Theta$. Для оператора $\mathbf{A}$ при фиксированных базисах $\ker \mathbf{A}$ совпадает с подпространством решений однородной линейной системы $AX = \Theta$. ФСР этой системы дает базис ядра $\ker \mathbf{A}$, причем по теореме о ФСР число векторов в ФСР равно $n - r(A)$.

Поэтому $\dim \ker \mathbf{A} = d_{\mathbf{A}} = n - r(A) = n - r_{\mathbf{A}}$.

Пример. Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – стандартный базис в V_3; $\mathbf{A}$ – оператор ортогонального проектирования V_3 на плоскость $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{A} \underset{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}{\leftrightarrow} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \dim(im\,\mathbf{A}) = r(A) = 2;\ \dim(\ker \mathbf{A}) = 1.$$

$$im\,\mathbf{A} = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle,\ \ker \mathbf{A} = \langle \vec{k} \rangle.$$

Более того $V_3 = im\,\mathbf{A} \oplus \ker \mathbf{A}$.

Алгебра линейных операторов

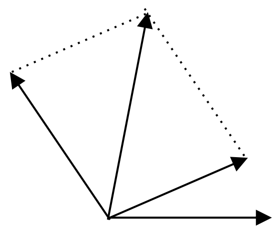
Пусть $\mathbf{A}: L \to L$, $\mathbf{B}: L \to L$.

Определение. $(\mathbf{A}=\mathbf{B}) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\forall x \in L \quad \mathbf{A}x=\mathbf{B}x)$.

Если $\mathbf{A}, \mathbf{B}: L_n \to L_n$; $(e_1, \dots, e_n)$ – фиксированный базис в L_n; $\mathbf{A} \leftrightarrow A$, $\mathbf{B} \leftrightarrow B$, то $\mathbf{A}x=\mathbf{B}x \quad \leftrightarrow \quad AX=BX$. В силу произвольности элемента x имеем $A=B$. Итак, при фиксированном базисе в L_n равным операторам соответствуют равные матрицы.

Определение. Суммой операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется

такой оператор, обозначаемый $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, что $\forall x \in L \ (\mathbf{A}+\mathbf{B})x=\mathbf{A}x+\mathbf{B}x$.



Докажем, что оператор $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ является линейным оператором.

$$\forall x_1, x_2 \in L, \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in P \ (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\mathbf{A}(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)+\mathbf{B}(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=$$

$$=\alpha_1 \mathbf{A}x_1+\alpha_2 \mathbf{A}x_2+\alpha_1 \mathbf{B}x_1+\alpha_2 \mathbf{B}x_2==\alpha_1(\mathbf{A}x_1+\mathbf{B}x_1)+\alpha_2(\mathbf{A}x_2+\mathbf{B}x_2)=\alpha_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})x_1+\alpha_2(\mathbf{A}+\mathbf{B})x_2.$$

В конечномерном пространстве при фиксированном базисе операторной записи $\mathbf{A}x+\mathbf{B}x$ соответствует матричная запись $AX+BX=(A+B)X$. Отсюда следует, что при сложении операторов складываются их соответствующие матрицы относительно фиксированного базиса.

Свойства сложения операторов

1). $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

2). $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

3). $\mathbf{A}+\mathbf{\Theta}=\mathbf{A}$;

4). $\forall \mathbf{A}: L \to L \quad \exists!(-\mathbf{A}): L \to L \ : \ \mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\Theta.$

Исходя из этих свойств, ясно, что множество всех линейных операторов, действующих в L, образует аддитивную абелеву группу.

Определение. Произведением оператора $\mathbf{A}$ на число $\lambda \in P$ называется такой оператор, обозначаемый $\lambda\mathbf{A}$, что

$$\forall x \in L \quad (\lambda\mathbf{A})x = \lambda \cdot (\mathbf{A}x).$$

Оператор $\lambda\mathbf{A}$ – линейный.

В конечномерном пространстве при фиксированном базисе оператору $\lambda\mathbf{A}$ соответствует матрица $\lambda \cdot A$.

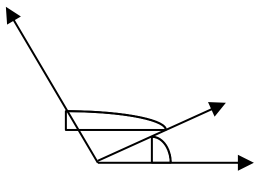
Для операций сложения операторов и умножения операторов на число выполняются все те свойства, которые определяют линейное пространство.

Таким образом, множество всех линейных операторов, действующих в L, относительно операций сложения операторов и умножения оператора на число образует линейное пространство.

Определение. Произведением $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется оператор, такой, что

$$\forall x \in L \qquad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})x = \mathbf{A}(\mathbf{B}x),$$

т.е. применение к x произведения операторов $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ означает последовательное применение операторов: сначала x преобразуется в $y = \mathbf{B}x$, а затем y преобразуется в $z = \mathbf{A}y$.



$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ – линейный оператор и в случае конечномерного пространства оператору $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ соответствует произведение матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ при фиксированном базисе.

Определение. Оператор $\mathbf{A}$ называется обратным, если $\exists \mathbf{B} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Оператор $\mathbf{B}$ называется обратным к $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$.

Если обратимый оператор $\mathbf{A} : L_n \to L_n$; $(e_1, \dots, e_n)$ – фиксированный базис в L_n и $\mathbf{A} \leftrightarrow A$, то $\mathbf{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$.

Определение.

($\mathbf{A} : L \to L'$ – вырожденный) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\exists x \neq \theta \in L : \mathbf{A}x = \Theta)$.

Определение.

($\mathbf{A} : L \to L'$ – невырожденный) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (\ker \mathbf{A} = \{\theta\})$

Теорема об эквивалентных условиях невырожденности оператора

Следующие условия для оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$ эквивалентны:

(1) $\mathbf{A}$ – невырожденный;

(2) $d_{\mathbf{A}} = 0$;

(3) $r_{\mathbf{A}} = n$;

(4) $im\,\mathbf{A} = L_n$;

(5) $\det \mathbf{A} \neq 0$;

(6) $\mathbf{A}$ – обратимый.

Лекция 10. Собственные значения и собственные векторы.
Характеристический многочлен

Определение. Инвариантом линейного оператора $\mathbf{A}\,:\,L_n \to L_n$ называется такое свойство матрица $\mathbf{A}$ оператора, которое не изменяется при изменении базиса в L_n.

Примерами инвариантов линейного оператора являются:

1). Ранг матрицы оператора.

2). Определитель матрицы оператора. Действительно, из равенства $A' = T^{-1}AT$ имеем $|A'| = |T^{-1}|\cdot|A|\cdot|T| \Rightarrow |A'| = \dfrac{1}{|T|}\cdot|A|\cdot|T| \Rightarrow |A'| = |A|$.

Определитель матрицы оператора называется определителем оператора.

3). Характеристический многочлен оператора $\mathbf{A}$.

Пусть, $\mathbf{A} \underset{(e_1,\dots,e_n)}{\leftrightarrow} A$, $\lambda \in P$. Тогда $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \leftrightarrow A - \lambda E$. Определитель матрицы $A - \lambda E$, равный

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \dots + d_n\lambda^n,$$

называется характеристическим многочленом $\varphi_A(\lambda)$ матрицы A.

Докажем, что $\varphi_A(\lambda)$ не зависит от выбора базиса в L_n. Действительно,
$\varphi_{A'}(\lambda) = |A' - \lambda E| = |T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET| = |T^{-1}(A-\lambda E)T| = |T^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|T| = |A-\lambda E|$.

Характеристический многочлен матрицы A называется характеристическим многочленом оператора $\mathbf{A}$ и обозначается $\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Из инвариантности многочлена $\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ следует, что его корни являются инвариантами оператора $\mathbf{A}$.

Собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}\,:\,L_n \to L_n$

Определение. Число $\lambda \in P$ называется собственным значением оператора $\mathbf{A}$, если существует ненулевой вектор $x \in L_n$ такой, что $\boxed{\mathbf{A}x = \lambda x}$. Вектор x называется собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, соответствующим собственному значению λ. Из определения следует, что вектор x коллинеарен своему образу.

Теорема о собственных значениях оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$.

(λ – собственное значение оператора $\mathbf{A}$) $\Leftrightarrow$

(λ – корень характеристического многочлена $\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ оператора $\mathbf{A}$).

Доказательство.

($\Rightarrow$**)** Пусть λ – собственное значение оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$. Это значит, что существует ненулевой вектор $x \in L_n$: $\mathbf{A}x = \lambda x$. Последнее равенство можно переписать в виде $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})x = \theta$. Так как $x \neq \theta$, то $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \neq \{\theta\}$, т.е. $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ – вырожденный и, следовательно, $|A - \lambda\mathrm{E}| = 0$ (условие вырожденности оператора). Отсюда λ – корень характеристического многочлена $\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = |A - \lambda\mathrm{E}|$.

($\Leftarrow$**)** По той же цепочке пойдем обратно. Пусть λ – корень характеристического многочлена оператора $\mathbf{A} \Rightarrow$ $\ker(A - \lambda\mathrm{E}) \neq \{\theta\}$ $\Rightarrow$ $\exists x \neq 0$: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})x = \theta$ $\Rightarrow$ $\mathbf{A}x = \lambda x$ $\Rightarrow$ λ – собственное значение оператора $\mathbf{A}$.

Следствие. В комплексном пространстве C_n любой линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.

Свойства собственных векторов оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$.

1). Каждому собственному вектору оператора $\mathbf{A}$ соответствует одно собственное значение.

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 – собственные значения оператора $\mathbf{A}$, соответствующие собственному вектору x, т.е. $\mathbf{A}x = \lambda_1 x$ и $\mathbf{A}x = \lambda_2 x$. Тогда $(\lambda_1 - \lambda_2)x = \theta$. Так как $x \neq 0$, то из последнего равенства следует, что $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2$.

2). (x – собственный вектор оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ) $\Rightarrow$ ($\forall \alpha \neq 0 \quad \alpha x$ – собственный вектор оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ).

Доказательство. $\mathbf{A}(\alpha x) = \alpha\mathbf{A}x = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x = (\lambda\alpha)x = \lambda(\alpha x)$.

3). (x_1 и x_2 – линейно независимые собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ) $\Rightarrow$ ($\forall \alpha_1, \alpha_2$ ($|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ – собственный вектор оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ).

Определение. Подпространство $\mathbf{L}_\lambda \subset L_n$, натянутое на собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, называется корневым подпространством, отвечающим λ.

Теорема. $\mathbf{L}_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$.

Теорема. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – попарно различные собственные значения оператора $\mathbf{A}$ и $x_1, \ldots, x_k$ – соответствующие им собственные векторы: $\mathbf{A}x_1 = \lambda_1 x_1$, …, $\mathbf{A}x_k = \lambda_k x_k$, то система векторов $\{x_1, \ldots, x_k\}$ линейно независима.

Доказательство (от противного).

Пусть $\{x_1, \ldots, x_k\}$ линейно зависима. Тогда ее ранг $r < k$ и МЛНС состоит из r векторов. Пусть для определенности $\{x_1, \ldots, x_r\}$ – МЛНС и $\forall\, j \in \{r+1, \ldots, k\}$

$x_j \mapsto \{x_1, \ldots, x_r\}$, т.е. $x_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$. Умножим левую и правую часть равенства на λ_j. Получим $\lambda_j x_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_j \alpha_i x_i$. (1)

С другой стороны, $\mathbf{A}x_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}x_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_j x_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i x_i$. (2)

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), будем иметь $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\lambda_i - \lambda_j\right) x_i = \theta$. Такое равенство по определению линейной независимой системы возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i\left(\lambda_i - \lambda_j\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, r$.

В силу того, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, получаем $\alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots, r$. Тогда из равенства $x_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$ следует, что собственный вектор x_j равен θ, что противоречит его определению.

Теорема. Собственному значению оператора кратности k соответствует не более k линейно независимых собственных векторов.

Определение. Множество всех собственных значений оператора $\mathbf{A}$ (матрицы A) с учетом их кратностей называется ***спектром оператора*** $\mathbf{A}$ (матрицы A) и обозначается через $Sp\mathbf{A}$ ($Spec\,\mathbf{A}$).

Определение. Если все корни характеристического уравнения простые, то *спектр* называется *простым*.

Замечание. Под кратностью собственного значения оператора понимается алгебраическая кратность корня характеристического многочлена.

Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$

1). Составить характеристический многочлен $|A-\lambda E|$ матрицы A оператора $\mathbf{A}$ в некотором базисе и найти все его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, лежащие в основном поле P. Это и будут собственные значения оператора $\mathbf{A}$; $Sp\mathbf{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

2). Решить линейную систему $(A-\lambda_i E)X = \Theta$ для каждого λ_i $(1 \le i \le k)$. Найти ФСР в $\mathbf{L}_{\lambda_i}$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$, $\lambda = 1$ – корень кратности 2.

$A-E = \begin{pmatrix} 1-1 & 5 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0 \cdot x_1$ – общее решение ОСЛУ.

Пусть $x_1 = 1$. Тогда $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – собственный вектор $\mathbf{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$.

$\mathbf{L}_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in P \right\}$.

Лекция 11. Инвариантные подпространства. Структура линейного оператора.

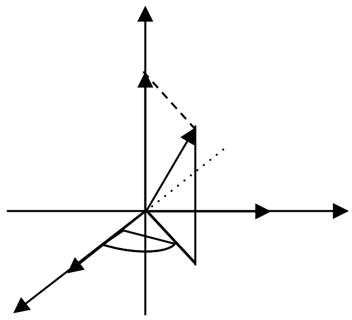
Инвариантные подпространства

Определение. Подпространство $\mathbf{L} \subset L_n$ называется инвариантным относительно оператора $\mathbf{A}: L_n \to L_n$ ($\mathbf{A}$ – инвариантным), если $\forall x \in \mathbf{L} \quad \mathbf{A}x \in \mathbf{L}$. A – инвариантное подпространство обозначается символом $\mathbf{L}_A$.

Пример 1. Подпространства $\{\theta\}, im\,\mathbf{A}, \ker\mathbf{A}, \mathbf{L}_\lambda, L_n$ всегда $\mathbf{A}$ – инвариантны.

Пример 2. Пусть в трехмерном пространстве геометрических векторов $V_3 = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ действует оператор поворота $\mathbf{A}$ плоскости $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ вокруг прямой $\langle \vec{k} \rangle$ на угол $\varphi \neq \pi k$. В V_3 образуются следующие $\mathbf{A}$ – инвариантные подпространства:

1. Одномерное подпространство $\mathbf{L}_1 = \langle \vec{k} \rangle$ – корневое подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ оператора, т.к. $\mathbf{A}\vec{k} = 1 \cdot \vec{k}$;
2. Двумерное подпространство $\mathbf{L}_2 = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ – плоскость. В этой плоскости нет ни одного собственного вектора оператора $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{L}_2$ – $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство, но не является корневым.



Заметим, что $V_3 = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \oplus \langle \vec{k} \rangle$, т.е. $V_3 = \mathbf{L}_\mathbf{A} \oplus \mathbf{L}_\lambda$. И это неслучайно. Запишем матрицу оператора поворота $\mathbf{A}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $A_2 = (1)_{1\times 1}$.

Такой вид матрицы называется клеточно-диагональный.

Первая клетка $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ соответствует двумерному подпространству $\mathbf{L}_A = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$; в этом подпространстве под действием оператора $\mathbf{A}$ происходит поворот векторов на угол φ вокруг неподвижной точки O, иными словами, поворот плоскости $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ вокруг неподвижной точки O на угол φ, т.к. матрица A_1 – матрица оператора поворота.

Вторая клетка $A_2 = (1)_{1\times 1}$ в матрице A соответствует одномерному подпространству $\mathbf{L}_\lambda$, в котором $\forall x \in \mathbf{L}_\lambda \ (x \neq \theta)$ $\mathbf{A}x = 1 \cdot x$, т.е. прямая $\langle \vec{k} \rangle$ под действием оператора $\mathbf{A}$ будет оставаться неподвижной.

Найдем собственные значения и собственные векторы оператора поворота $\mathbf{A}$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi\right) \;\Rightarrow\; 1-\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1.$$

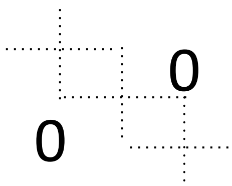
$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$ не имеет вещественных корней (его дискриминант меньше нуля).

Итак, оператор поворота $\mathbf{A}$ в V_3 имеет только одно собственное значение, которому отвечает собственный вектор $\vec{k}$.

Структура линейного оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$.

Наиболее простой вид матрицы – это клеточно-диагональные вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$



где клетки $A_i \ (i = 1, \ldots, k)$ матрицы A есть квадратные матрицы некоторого порядка n_i, причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, n – порядок матрицы.

Структура линейного оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$ определяется структурой его матрицы.

Теорема о достаточном условии приведения матрицы оператора $\mathbf{A}: L_n \to L_n$ к клеточно-диагональному виду

Если $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ – $\mathbf{A}$ – инвариантные подпространства пространства L_n и $L_n = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, то существует базис в L_n такой, в котором матрица этого оператора имеет клеточно-диагональный вид.

Доказательство. Пусть $\dim \mathbf{L}_1 = k$, тогда $\dim \mathbf{L}_2 = n-k$. Рассмотрим произвольный базис $(e_1, \dots, e_k)$ в $\mathbf{L}_1$ и $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ – базис в $\mathbf{L}_2$. Тогда $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ можно принять за базис в L_n.

В силу инвариантности относительно $\mathbf{A}$ подпространства $\mathbf{L}_1$ из того, что $e_1, \dots, e_k \in \mathbf{L}_1$ следует, что $\mathbf{A}e_1, \dots, \mathbf{A}e_k \in \mathbf{L}_1$, т.е.

$$\mathbf{A}e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{k1}e_k = (e_1, \dots, e_k)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{k1} \end{pmatrix},$$

…………………………………

$$\mathbf{A}e_k = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \dots + a_{kk}e_k = (e_1, \dots, e_k)\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, $\mathbf{L}_2$ – $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство, следовательно, $\mathbf{A}e_{k+1}, \dots, \mathbf{A}e_n \in \mathbf{L}_2$, а поэтому

$$\mathbf{A}e_{k+1} = a_{k+1,k+1}e_{k+1} + \dots + a_{n,k+1}e_n,$$

………………………

$$\mathbf{A}e_n = a_{k+1,n}e_{k+1} + \dots + a_{n,n}e_n.$$

Тогда в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ эти векторы будут представлены следующими разложениями:

$$\mathbf{A}e_1 = a_{11}e_1 + \dots + a_{k1}e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n,$$

……………………………………………

$$\mathbf{A}e_k = a_{1k}e_1 + \dots + a_{kk}e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n,$$

$$\mathbf{A}e_{k+1} = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_k + a_{k+1,k+1} \cdot e_{k+1} + \dots + a_{k+1,n} \cdot e_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{A}e_n = 0\cdot e_1 + \ldots + 0\cdot e_k + a_{n,k+1}\cdot e_{k+1} + \ldots + a_{n,n}\cdot e_n$$

и матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе будет иметь ***клеточно-диагональный*** вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1\,k+1} & & a_{k+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 – клетка k-го порядка соответствует $\mathbf{L}_1$ размерности k, A_2 – клетка $(n-k)$-го порядка соответствует $\mathbf{L}_2$ размерности $(n-k)$.

Теорема. Если в некотором базисе матрица оператора $\mathbf{A} : L_n \to L_n$ имеет клеточно-диагональный вид, то пространство L_n разлагается в прямую сумму своих инвариантных относительно этого оператора подпространств.

Из всех клеточно-диагональных матриц наиболее простой вид у диагональной матрицы (все клетки первого порядка).

Определение. Говорят, что матрица оператора приводима к диагональному виду, если существует базис л.п. L_n, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Теорема о приведении матрицы оператора к диагональному виду

Для того чтобы матрица оператора была приводима к диагональному виду необходимо и достаточно, чтобы в L_n существовал базис из собственных векторов этого оператора, т.е.

$\left(\mathrm{A} = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \right) \Leftrightarrow$ ($\exists (e_1, \ldots, e_n)$ – базис в L_n: $\mathbf{A}e_i = \lambda_i e_i,\ \ i = \overline{1,n}$).

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{A} = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ в некотором базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{A}e_1 = \lambda_1 e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n = \lambda_1 e_1, \\ \mathbf{A}e_2 = 0\cdot e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + 0\cdot e_n = \lambda_2 e_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}e_n = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_n e_n \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ – собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

($\Leftarrow$) Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис в L_n, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{A}e_1 = \lambda_1 e_1, \mathbf{A}e_2 = \lambda_2 e_2, \dots, \quad \mathbf{A}e_n = \lambda_n e_n$. Тогда в этом базисе матрица оператора имеет диагональный вид $A = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Надо заметить, что по диагонали матрицы A стоят собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

В частности, $L_n = \mathbf{L}_{\lambda_1} \oplus \mathbf{L}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{L}_{\lambda_k}$, где $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ – множество всех различных собственных значений оператора $\mathbf{A}$.

Пример. Привести, если возможно, матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Решение. Найдем собственные значения A.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4.$$

$Sp\,\mathbf{A} = \{2, -2\}$ – простой спектр оператора $\mathbf{A}$.

Простому спектру оператора $\mathbf{A}$ соответствует линейно независимая система из $n = 2$ собственных векторов этого оператора, которую можно принять за базис л.п., причем в этом базисе матрица оператора имеет диагональный вид: $\Lambda = [2, -2] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Найдем базис л.п. из собственных векторов $\mathbf{A}$.

$$\lambda_1 = 2 \quad (A - \lambda_1 E)X = \Theta.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (A - \lambda_2 E)X = \Theta.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = -3\alpha_1 \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Оператор простой структуры

Среди операторов простейшим в известном смысле является оператор простой структуры (ОПС).

Определение. Оператор $\mathbf{A} : L_n \to L_n$ называется оператором простой структуры, если существует n линейно независимых собственных векторов этого оператора.

Свойства оператора простой структуры

1). Матрицу ОПС можно привести к диагональному виду в базисе из его собственных векторов. И наоборот, матрица диагонального вида соответствует ОПС.

Итак, матрицу только оператора простой структуры можно привести к диагональному виду.

Из этого свойства видно, что ОПС имеет наиболее простое координатное представление, которое может быть определено с помощью одних лишь его собственных значений.

2). Геометрическое действие ОПС в R_n можно описать следующим образом: существует n «направлений», которые не изменяются при действии на R_n оператора и вдоль которых пространство испы-тывает «условное» растяжение с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, которые являются собственными значения-ми оператора.

3). Если $\mathbf{A}$ – оператор простой структуры в L_n и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ – множество всех его различных собственных значений, то

$$L_n = \mathbf{L}_{\lambda_1} \oplus \mathbf{L}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{L}_{\lambda_n}.$$

4). Если оператор $\mathbf{A} : L_n \to L_n$ имеет простой спектр, состоящий из n собственных значений, то $\mathbf{A}$ – оператор простой структуры. (Обратное утверждение, вообще говоря, неверно).

В этом случае, $L_n = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$, где $e_1, \dots, e_n$ – собственные векторы оператора $\mathbf{A}$.

Лекция 12. Структура линейных операторов в R_n и C_n

Вещественный оператор

Определение. Вещественным оператором называется оператор вещественного линейного пространства.

Теорема. Если $\mathbf{A}$ – оператор ненулевого вещественного пространства R_n, то в R_n существует одномерное или двумерное $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство.

Доказательство.

В вещественном пространстве R_n не всякий линейный оператор имеет собственные векторы, так как не всякий многочлен с вещественными коэффициентами имеет вещественные корни.

Рассмотрим две возможности.

В случае, когда характеристический многочлен оператора $\mathbf{A}$ имеет хотя бы один вещественный корень λ, тогда λ является собственным значением оператора $\mathbf{A}$ и ему соответствует собственный вектор x и, следовательно, корневое подпространство $\mathbf{L}_\lambda = \langle x \rangle$ будет одномерным $\mathbf{A}$ – инвариантным подпространством л.п. R_n.

Покажем теперь, что в случае, когда нет вещественных корней характеристического уравнения, существует двумерное $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство. Пусть $\lambda_0 = \alpha + j\beta$ – комплексный корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Тогда коэффициенты системы $(A - \lambda_0 E)X = \Theta$ комплексные и ненулевым решением этой системы, вообще говоря, будет столбец из комплексных чисел:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 + j\,y_1 \\ \vdots \\ x_n + j\,y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x + y\,j,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – вещественные n – мерные векторы из R_n, одновременно не равные нулевому вектору. Пусть $x \neq \theta$.

Подставим в систему $(A - \lambda_0 E)X = \Theta \iff AX = \lambda_0 X$ выражения λ_0 и X_0:

$$A(x + yj) = (\alpha + \beta j)(x + yj) \iff Ax + jAy = (\alpha x - \beta y) + j(\beta x + \alpha y).$$

Приравнивая в полученном равенстве вещественные и мнимые части,

получим систему $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y, \\ Ay = \beta x + \alpha y, \end{cases}$ где $Ax, Ay \in R_n$. (1)

Убедимся, что линейная оболочка $\mathbf{L} = \langle x, y \rangle$ векторов x и y есть двумерное $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство л.п. R_n.

Действительно,

$$\forall z = \gamma_1 x + \gamma_2 y \in \mathbf{L} \quad \mathbf{A} z = \mathbf{A}(\gamma_1 x + \gamma_2 y) = \gamma_1 \mathbf{A} x + \gamma_2 \mathbf{A} y =$$

$$= \gamma_1(\alpha x - \beta y) + \gamma_2(\beta x + \alpha y) = (\underbrace{\gamma_1 \alpha + \gamma_2 \beta}_{\sigma_1 \in R}) x + (\underbrace{\gamma_2 \alpha - \gamma_2 \beta}_{\sigma_2 \in R}) y = \sigma_1 x + \sigma_2 y \in \mathbf{L}$$

и, следовательно, $\mathbf{L}$ – $\mathbf{A}$ – инвариантно.

Линейную независимость векторов x и y докажем методом от противного.

Предположим, что x и y линейно зависимы, получим $y = \mu x$, где $\mu \in R$. Но тогда из уравнения $Ax = \alpha x - \beta y$ системы (1) будем иметь $Ax = \alpha x - \beta(\mu x) = (\alpha - \beta\mu) x$, где $\alpha - \beta\mu$ – вещественное число, и, следовательно, является собственным значением оператора $\mathbf{A}$ с собственным вектором x, что противоречит тому, что в нашем случае у оператора $\mathbf{A}$ нет вещественных собственных значений. Таким образом, векторы x и y линейно независимы и $\mathbf{L} = \langle x, y \rangle$ – двумерное инвариантное подпространство.

Понятие жордановой нормальной формы матрицы оператора в C_n

Определение. Назовем жордановой клеткой порядка n_k с собственным значением λ_k матрицу A_k вида

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}_{n_k, n_k}. \qquad (2)$$

Определение. Матрица A имеет жорданову нормальную форму (ж.н.ф.) или является жордановой, если $A = [A_1, \dots, A_s]$ – клеточно-диагональная матрица, все клетки $A_1, \dots, A_s$ которой – жордановы.

Из всех жордановых матриц наиболее простой вид имеет диагональная матрица (у нее все клетки имеют первый порядок).

Теорема Жордана

Для любого линейного оператора в комплексном пространстве C_n существует базис, в котором матрица оператора имеет жорданову нормальную форму

$$G=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $A_1,\dots,A_s$ – жордановы клетки и $n_1+\dots+n_s=n$.

Базис, в котором матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет жорданову нормальную форму, называется каноническим.

Из (3) следует, что канонический базис разбивается на s групп, каждая из которых порождает $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство. Кроме того, если $e_1, e_2,\dots, e_n$ – векторы k-й группы этого базиса (так что координатами их образов являются столбцы матрицы (2), пересекающие клетку A_k), то как следует из (2) $\mathbf{A}e_1=\lambda_k e_1$, $\mathbf{A}e_2=e_1+\lambda_k e_2,\dots,$ $\mathbf{A}e_{n_k}=e_{n_k-1}+\lambda_k e_{n_k}$, т.е. в этой группе только один вектор e_1 – собственный с собственным значением λ_k, остальные называются присоединенными, соответствующими значению λ_k.

Из сказанного следует, что в ж.н.ф. матрицы оператора $\mathbf{A}$, имеющего кратные корни характеристического многочлена, столько клеток, сколько у оператора линейно независимых векторов.

Пример.

Привести к жордановой нормальной форме матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ Найти канонический базис.

Решение. Составим характеристический многочлен оператора $\mathbf{A}$ и найдем его корни:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3.$$

Корни его $\lambda_{1,2,3}=2$, иначе $\lambda=2$ – корень кратности 3. Выясним, сколько клеток в ж.н.ф. данной матрицы. Рассмотрим систему $(A-2E)X=\Theta$ и найдем ее ранг. Имеем

$$r(A-2E)=rang\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1 \quad\Rightarrow\quad d_{A-2E}=2$$
,

т.е. фундаментальная система решений системы $(A-2E)X=\Theta$ состоит из двух решений, значит, у оператора A – два линейно независимых собственных вектора и ж.н.ф. матрицы должна состоять из двух клеток, причем сумма порядков этих клеток совпадает с кратностью собственного значения $\lambda=2$, т.е. с $k=3$.

Тогда по теореме о приведении матрицы оператора к ж.н.ф. существует канонический базис, в котором ж.н.ф. матрицы оператора $\mathbf{A}$ определена однозначно с точностью до перестановки входящих в нее жордановых клеток.

В силу сказанного матрица оператора $\mathbf{A}$ может иметь следующую ж.н.ф.

$$G=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Найдем теперь канонический базис (e_1, e_2, e_3), разбив его на две группы: e_1 и (e_2, e_3). В каждой группе по одному собственному вектору оператора A.

За e_1 и e_2 возьмем фундаментальную систему решений

$$(A-2E)X=\Theta: \begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad x_1+2x_2+x_3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_3=-x_1-2x_2$$

– общее решение системы. За свободные неизвестные возьмем следующие наборы чисел $\{-2,1\}$ и $\{1,0\}$. Тогда $e_1=(-2,1,0)$, $e_2=(1,0,-1)$ составляют ФСР системы. А это значит, что e_1 и e_2 – собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, соответствующие собственному значению $\lambda=-3$.

Третий вектор канонического базиса e_3 – присоединенный вектор, соответствующий этому же собственному значению, найдем из условия $(A-2E)e_3=e_2$, т.е. из системы

$$\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Откуда можно получить, что $e_3=(0,0,1)$.

Матрица перехода от базиса, в котором задана матрица A, к каноническому базису (e_1, e_2, e_3) имеет вид $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Можно проверить, что имеет место равенство $G = T^{-1}AT$.

Замечание. Каждая группа канонического базиса (e_1, e_2, e_3) порождает $\mathbf{A}$ – инвариантное подпространство: $\mathbf{L}_1 = \langle e_1 \rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$, причем $R_3 = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$.

Лекция 13. Сопряженные и самосопряженные операторы. Сопряженный оператор в U_n и его свойства

Линейные операторы в унитарном пространстве

Пусть U_n – унитарное пространство над произвольным числовым полем P. Рассмотрим основные классы линейных операторов, таких, собственные векторы и собственные значения которых обладают специальными свойствами:

1. сопряженный оператор;
2. самосопряженный или эрмитов оператор;
3. унитарный оператор;
4. нормальный оператор.

Пусть $A: U_n \to U_n$.

Определение.

(A^* – сопряженный оператор к A в U_n) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \left(\forall x, y \in U_n \left(Ax, y\right) = \left(x, A^* y\right)\right)$.

Замечание. Переход от A к A^* можно выразить в виде правила: если в $\left(Ax, y\right)$ мы желаем A «перебросить» на второе место, то к нему нужно «приписать звездочку».

Определение.

(A – самосопряженный оператор в U_n) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \left(\forall x, y \in U_n \quad \left(Ax, y\right) = \left(x, Ay\right)\right)$.

По определению $A = A^*$.

Определение. (A – унитарный оператор в U_n) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $\left(A^* A = AA^* = E\right)$.

Определение. (A – нормальный оператор в U_n) $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $\left(A^* A = AA^*\right)$.

Не трудно убедиться, что как самосопряженные $\left(A^* A = AA^* = A^2\right)$, так и унитарные $\left(A^* A = AA^* = E\right)$ операторы являются частными случаями нормальных операторов и поэтому самосопряженные и унитарные операторы обладают свойствами нормального оператора.

Теорема. Оператор A^*, сопряженный к линейному оператору A, линеен.

Доказательство.

Действительно, $\forall x, y_1, y_2 \in U_n$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in C$.

С одной стороны, $\left(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \left(x, A^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right)\right)$.

С другой стороны, $\left(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \left(Ax, \alpha_1 y_1\right) + \left(Ax, \alpha_2 y_2\right) =$

$= \overline{\alpha}_1\left(Ax, y_1\right) + \overline{\alpha}_2\left(Ax, y_2\right) = \overline{\alpha}_1\left(x, A^* y_1\right) + \overline{\alpha}_2\left(x, A^* y_2\right) =$

$= \left(x, \alpha_1 A^* y_1\right) + \left(x, \alpha_2 A^* y_2\right) = \left(x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2\right)$.

Отсюда, $\left(x, A^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right)\right) = \left(x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2\right)$ и $\forall\, x, y_1, y_2 \in U_n$ имеем $A^*\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2$, что означает линейность оператора A^*.

Теорема. Пусть $\left(e_1, \dots, e_n\right)$ – ОНБ в U_n.

$\left(A \leftrightarrow A,\quad A^* \leftrightarrow A^*\right) \;\Rightarrow\; \left(A^* = \overline{A}^T\right)$.

Замечание. Матрица $\overline{A} = \left(\overline{a}_{ij}\right)$ называется комплексно-сопряженной к матрице $A = \left(a_{ij}\right)$. Матрица $A^* = \overline{A}^T$ называется сопряженной к A.

Доказательство.

Пусть $\forall\, x, y \in U_n$, $x \leftrightarrow X$, $y \leftrightarrow Y$ в базисе $\left(e_1, \dots, e_n\right)$.

Тогда в ОНБ $\left(e_1, \dots, e_n\right)$

$$\begin{cases} \left(Ax, y\right) = \left(AX\right)^T \overline{Y} = X^T A^T \overline{Y}, \\ \left(Ax, y\right) = \left(x, A^* y\right) = X^T \overline{A^* Y} = X^T \overline{A}^* \overline{Y} \end{cases} \Rightarrow\; A^T = \overline{A}^* \;\Rightarrow\; A^* = \overline{A}^T$$

Замечание. В евклидовом пространстве $A^* = A^T$.

Примеры.

1) $A = \begin{pmatrix} 1+j & 2 \\ -2 & 2-j \end{pmatrix}$; $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1-j & 1 \\ -2 & 2+j \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1-j & -2 \\ 1 & 2+j \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $A^* = A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Теорема. Для любого линейного оператора $A: U_n \to U_n$ существует единственный сопряженный к нему оператор.

Доказательство.

Существование A^* к A следует из предыдущей теоремы.

Единственность докажем методом от противного.

Пусть $(Ax, y) = (x, A^* y)$ и $(Ax, y) = (x, \tilde{A}y)$. Из этих двух равенств следует, что $\forall\, x, y \in U_n \quad (x, A^* y) = (x, \tilde{A}y) \Rightarrow A^* = \tilde{A}$.

Теорема. Операция перехода от оператора A к оператору A^* связана с операциями над линейными операторами следующими соотношениями:

1). $(AB)^* = B^* A^*$.

2). $(A^*)^* = A$.

3). $(A+B)^* = A^* + B^*$.

4). $(\lambda \cdot A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$.

5). $\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^*\right)^{-1}$.

Теорема. Ранги операторов A и A^* равны.

Доказательство.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – ОНБ в U_n. В этом базисе $A \leftrightarrow A$, $A^* \leftrightarrow A^* = \bar{A}^T$.
$r_A = r(A) = r\left(\bar{A}^T\right) = r_{A^*}$.

Теорема. $im\, A \perp \ker A^*$; $\ker A \perp im\, A^*$.

Доказательство.

$\forall\, x \in \ker A$, т.е. $Ax = \theta$, $\forall\, y \in U_n$ имеем

$(x, A^* y) = (Ax, y) = (\theta, y) = 0$, что означает $\ker A \perp im A^*$.

Теорема. $U_n = im\, A \oplus \ker A^*$; $U_n = im\, A \oplus \ker A$.

Самосопряженный оператор и его свойства

Определение. Самосопряженный оператор $A: U_n \to U_n$ совпадает со своим сопряженным $A^*: U_n \to U_n$, т.е. $\forall\, x, y \in U_n \quad (Ax, y) = (x, Ay)$.

В комплексном пространстве A называется эрмитовым, в вещественном – симметрическим. Матрица эрмитова оператора в ОНБ удовлетворяет условию $\boxed{\bar{A} = A^T}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & 2 \end{pmatrix}$ – эрмитова матрица.

Матрица симметрического оператора $\boxed{A = A^T}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица.

Теорема о собственных значениях эрмитова оператора

Все корни характеристического многочлена эрмитова оператора вещественны, иными словами, эрмитов оператор имеет n собственных значений (с учетом их кратностей).

Доказательство.

Пусть $A: U_n \to U_n$. Характеристический многочлен оператора A имеет хотя бы один корень λ (по теореме Гаусса), который является собственным значением оператора A, т.е. $Ax = \lambda x$, где x – собственный вектор оператора A.

Для эрмитова оператора имеем $(Ax, x) = (x, Ax)$ или $(\lambda x, x) = (x, \lambda x) \;\; \Rightarrow \;\; \lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x)$. Так как $(x, x) \neq 0$ (т.к. $x \neq \theta$), то $\lambda = \bar{\lambda}$. Отсюда следует, что $\lambda \in R$.

Итак, все корни характеристического многочлена оператора A, которые являются собственными значениями оператора A, вещественны.

Замечание. Можно доказать, что самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E_n имеет n собственных значений (с учетом их кратностей).

Теорема о собственных векторах самосопряженного оператора

Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям самосопряженного оператора, взаимно ортогональны.

Доказательство.

Пусть $Ae_i = \lambda_i e_i$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, причем $\lambda_i, \lambda_j \in R$.

Для самосопряженного оператора имеем

$$(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) \;\; \Rightarrow \;\; (\lambda_i e_i, e_j) = (e_i, \lambda_j e_j) \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \lambda_i(e_i, e_j) = \lambda_j(e_i, e_j) \;\; \Rightarrow \;\; (\lambda_i - \lambda_j)\cdot(e_i, e_j) = 0.$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ и, следовательно, $(e_i, e_j) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; e_i \perp e_j$, что и требовалось доказать.

Теорема о структуре самосопряженного оператора

Самосопряженный оператор в n-мерном пространстве есть оператор простой структуры, причем в пространстве существует ОНБ из собственных векторов оператора, в котором его матрица имеет диагональный вид.

Прежде чем доказать эту теорему, докажем лемму.

Лемма. Если подпространство L n-мерного пространства, в котором действует самосопряженный оператор A, инвариантно относительно оператора A, то ортогональное дополнение L также A – инвариантно.

Действительно, если L – A – инвариантно, то $\forall x \in L \quad Ax \in L$. Докажем, что $\forall y \in L^{\perp} \quad Ay \in L^{\perp}$. Для этого рассмотрим скалярное произведение для произвольных элементов из L и $L^{\perp}$. Так как $Ax \in L$, $y \in L^{\perp}$, то $(Ax, y) = 0$. С другой стороны, $(Ax, y) = (x, Ay)$ и, следовательно, $(x, Ay) = 0 \;\Rightarrow\; x \perp Ay \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; Ay \in L^{\perp}$.

Доказательство теоремы.

Самосопряженный оператор A как в n-мерном комплексном, так и в вещественном пространстве имеет хотя бы одно собственное значение и потому хотя бы один собственный вектор e_1. Тогда $L_1 = \langle e_1 \rangle$ – одномерное корневое подпространство оператора A и, следовательно, L_1 – инвариантно относительно λ. По лемме $L_1^{\perp} - A$ – инвариантно; $\dim L_1^{\perp} = n-1$ (так как $U_n = L \oplus L^{\perp}$ и $\dim L + \dim L^{\perp} = n$).

Если $n-1 \geq 1$, то рассмотрим сужение оператора A в $L_1^{\perp}$ в силу инвариантности $L^{\perp}$ относительно A, т.е. $A: L_1^{\perp} \to L_1^{\perp}$. Самосопряженный оператор A в $L_1^{\perp}$ имеет хотя бы один собственный вектор e_2, причем $e_1 \perp e_2$.

Рассмотрим $L_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$. L_2 – двумерное A – инвариантное подпространство. Тогда $L_2^{\perp}$ – ортогональное дополнение к L_2 – также будет A – инвариантным, причем $\dim L_2^{\perp} = n-2$ ($U_n = L_2 \oplus L_2^{\perp}$).

Если $n-2 \geq 1$, то опять рассмотрим сужение оператора $A: L_2^{\perp} \to L_2^{\perp}$, который имеет хотя бы один собственный вектор e_3, причем $e_3 \perp e_1$ и $e_3 \perp e_2$ и т.д.

В этом процессе будет построена ортогональная система из n собственных векторов оператора A. Отсюда следует, что оператор A – оператор простой структуры и в ОНБ из собственных векторов его матрица будет иметь диагональный вид, где по диагонали этой матрицы будут расположены соответствующие собственные значения оператора A.

Теорема.

K – кратному собственному значению самосопряженного оператора соответствует ровно k линейно независимых собственных векторов.

Лекция 14. Унитарные и ортогональные операторы. Квадратичные формы в E_n

Определение. Оператор U унитарного (евклидова) пространства называется унитарным (ортогональным), если $U \cdot U^* = U^* U = E$ или на матричном языке $U \cdot \bar{U}^T = \bar{U}^T \cdot U = E$ ($UU^T = U^T U = E$) для матрицы U оператора U в ОНБ пространства.

Комплексная матрица U называется унитарной, если $U^{-1} = \bar{U}^T$. Вещественная матрица U называется ортогональной, если $U^{-1} = U^T$.

Критерий унитарности (ортогональности) оператора

Пусть U – линейный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве L_n. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) U – унитарен (ортогонален);

(б) матрица оператора U в любом ОНБ в L унитарна (ортогональна);

(в) U переводит ОНБ в ОНБ;

(г) $\forall x, y \in L : (Ux, Uy) = (x, y)$;

(д) $\forall x \in L : (Ux, Ux) = (x, x)$.

Доказательство.

(а) $\Rightarrow$ (б) очевидно.

(б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $U = (u_{ij})$ – матрица оператора U в некотором ОНБ $(e_1, \dots, e_n)$ из L_n и U унитарна (ортогональна), т.е. $\bar{U}^T U = E$.

($U^T U = E$). Тогда $(Ue_j, Ue_i) = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \bar{u}_{ki} = \delta_{ij}$, т.е. $(Ue_1, \dots, Ue_n)$ – ОНБ в L_n.

(в) $\Rightarrow$ (г). Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(Ue_1, \dots, Ue_n)$ – ОНБ в L_n. Тогда для любых векторов $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ из L_n имеем

$$(\mathbf{U}x, \mathbf{U}y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{U} e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{U} e_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i = (x, y).$$

(г) $\Rightarrow$ (д). Очевидно.

(д) $\Rightarrow$ (а). Пусть $(Ux, Ux) = (x, x)$ для всех $x \in L_n$. Тогда $(Ux, Ux) = (x, (U^* U) x) = (x, x)$ для всех $x \in L_n$, т.е. $(x, (U^* U - E) x) = 0$ для всех $x \in L_n$. Покажем, что $B = U^* U - E$ – тривиальный оператор.

Ясно, что $B^* = (U^*U - E)^* = (U^*U)^* - E^* = U^*U - E = B$, т.е. B – самосопряженный оператор. Если $B \neq \theta$, то B имеет собственный вектор a, отвечающий ненулевому собственному значению λ. Тогда $(a, Ba) = (a, \lambda a) = \lambda(a, a) \neq 0$, что противоречиво, т.к. для любого $x \in L_n$ $(x, Bx) = 0$. Поэтому $B = \theta$, и, следовательно, $U^*U = E$. Отсюда U – невырожденный оператор и, значит, $U^{-1} = U^*$. Теорема доказана.

Из этой теоремы виден геометрический смысл унитарного (ортогонального) оператора: он сохраняет длины векторов и углы между ними.

Свойства унитарных матриц

1). $U\bar{U}^T = E$, т.е. $\sum_{k=1}^{n} u_{ik}\bar{u}_{kj} = \delta_{ij}$ (строки матрицы U являются попарно ортогональными векторами единичной длины).

2). $\bar{U}^T U = E$, т.е. $\sum_{k=1}^{n} \bar{u}_{ki}u_{kj} = \delta_{ij}$ (столбцы матрицы U являются попарно ортогональными векторами единичной длины).

3). U^T и U^{-1} – унитарные матрицы.

4). $|\det U| = 1$.

Следствие 1. Унитарный (ортогональный) оператор невырожден.

Следствие 2. Обратный к унитарному оператору оператор унитарный (ортогональный).

Теорема о спектре унитарного оператора

Если U – унитарный (ортогональный) оператор и $\lambda \in SpU$, то $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Пусть $U = (u_{ij})$ – матрица унитарного (ортогонального) оператора U в некотором ОНБ.

Пусть $\lambda \in SpU$. Тогда λ отвечает собственный вектор $x \neq \theta$, т.е. $Ux = \lambda x$. В силу унитарности оператора U

$$(Ux, Ux) = (x, x) \Rightarrow (\lambda x, \lambda x) = (x, x) \Rightarrow \lambda \cdot \bar{\lambda}(x, x) = (x, x) \Rightarrow (\lambda\bar{\lambda} - 1)(x, x) = 0.$$

Так как $(x, x) \neq 0$, то из последнего равенства следует, что $\lambda\bar{\lambda} = 1$ или $|\lambda|^2 = 1$. Отсюда $|\lambda| = 1$.

Теорема о структуре унитарного оператора в комплексном пространстве

Унитарный оператор в унитарном пространстве U_n есть оператор простой структуры и существует в U_n ОНБ из собственных векторов оператора U, в котором его матрица имеет диагональный вид.

Теорема. Любой ортогональный оператор $P \neq E$ в двумерном евклидовом пространстве (в плоскости) R^2 есть либо поворот, либо осевая симметрия (зеркальное отражение).

Теорема о структуре ортогонального оператора в вещественном пространстве

Для всякого ортогонального оператора P в евклидовом пространстве E_n существует ОНБ, в котором его матрица имеет следующий клеточно-диагональный вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & p_1 & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & p_k \end{pmatrix},$$

где $p_1, \dots, p_k$ – квадратные матрицы второго порядка вида $p_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$.

Квадратичные формы в евклидовом пространстве R^n

Определение. Квадратичной формой от n вещественных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется числовая функция вида $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} \in R$ называются коэффициентами квадратичной формы.

Определение. Симметричная матрица $A = (a_{ij})_{n,n}$ из коэффициентов квадратичной формы называется матрицей квадратичной формы**.**

Например, матрица квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

имеет вид $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Пусть в некотором ОНБ вектор x имеет координатный столбец $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тогда квадратичную форму $F(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ можно записать в матричном виде $F(x,x)=X^T AX$ или в операторном виде $F(x,x)=(x,Ax)=(Ax,x)$, где A – самосопряженный оператор в R^n, соответствующий матрице A.

Основная задача, связанная с квадратичными формами, следующая: с помощью линейного преобразования переменных квадратичной формы привести квадратичную форму к наиболее простому (каноническому) виду.

Каноническим видом квадратичной формы называется квадратичная форма, в которой содержатся только лишь квадраты переменных, т.е. отсутствуют в ней слагаемые, содержащие произведения попарно различных переменных $x_i x_j,\ i\neq j$.

Теорема.

В n-мерном евклидовом пространстве R^n всякая квадратичная форма $F(x_1,\dots,x_n)$ путем ортогонального преобразования переменных $x_1,\dots,x_n$ приводится к каноническому виду.

Доказательство.

Пусть в ОНБ $(e_1,\dots,e_n)$ из R^n квадратичная форма имеет вид $F(x_1,\dots,x_n)=X^T AX=(x,Ax)$, где A – самосопряженный оператор в R^n с матрицей A в базисе $(e_1,\dots,e_n)$. Согласно структуре самосопряженного оператора A в R^n существует ОНБ $(e_1',\dots,e_n')$ из собственных векторов, в котором его матрица имеет диагональный вид $\Lambda=[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$, причем матрица перехода от ОНБ $(e_1,\dots,e_n)$ к ОНБ $(e_1',\dots,e_n')$ является ортогональной матрицей, для которой $P^{-1}=P^T$ и формулы преобразования координат имеют вид $X=PX'$.

Тогда квадратичная форма в базисе $(e_1',\dots,e_n')$ приводится к виду:

$$F(x_1',\dots,x_n')=(PX')^T\left(P\Lambda P^T\right)\cdot(PX')=(X')^T\left(P^T P\right)\Lambda\left(P^T P\right)X'=X'^T\Lambda X'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i'^2.$$

Замечание. Существует множество преобразований, приводящих квадратичную форму к каноническому виду разными способами.

Приложение квадратичных форм к задачам аналитической геометрии

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$. (*)

$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ – квадратичная форма.

Эту квадратичную форму с помощью ортогонального оператора (оператора поворота) можно привести к сумме квадратов. В ОНБ из собственных векторов матрицы квадратичной формы уравнение (*) будет иметь вид:

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a_1' x' + a_2' y' + a = 0$,

которое можно путем выделения полных квадратов привести к каноническому виду.

Точно также можно привести общее уравнение поверхности второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0$ к каноническому виду.

Лекция 15. Вычисление определенного интеграла. приложения. интегралы по фигуре

1 . Понятие интеграла по фигуре и его свойства

Для единообразного введения интегралов нам понадобится понятие фигуры и её меры.

Фигура и её мера

Объединим общим названием "фигура" – отрезок $[a,b]$, дугу (l), плоскую область (S), поверхность (σ), тело (V). Отрезок и дугу назовем одномерной фигурой, плоскую область и поверхность – двумерной фигурой, тело – трехмерной фигурой.

С понятием фигуры связано понятие её меры. Мерой одномерной фигуры назовем её длину, мерой двумерной фигуры назовем её площадь, мерой трехмерной фигуры назовем её объём. Для фигур (l), (S), (σ), (V) их меры соответственно обозначим l, S, σ, V. В общем случае фигуру обозначим $(\varPhi)$, а её меру – той же буквой $\varPhi$, но без скобок.

Для дальнейшего изложения введем понятие диаметра фигуры. Назовем диаметром $diam(\varPhi)$ фигуры $(\varPhi)$ наибольшее из расстояний между её точками. Например, диаметр шара радиусом R равен $2R$, диаметр куба равен длине его диагонали.

В дальнейшем будем предполагать, что

1) фигура $(\varPhi)$ — ограничена, т.е. имеет конечный диаметр,

2) фигура $(\varPhi)$ — замкнута, т.е. включает границу.

Задача о вычислении массы фигуры

Пусть $(\varPhi)$ – произвольная фигура, в каждой точке P которой известна плотность распределения массы $\gamma(P)$. Разобьём фигуру $(\varPhi)$ на n малых ячеек $(\Delta\varPhi_k)$ $(k=1,2,\dots n)$. В каждой ячейке $(\Delta\varPhi_k)$ выберем произвольную точку P_k (рис. 13). В силу малости ячейки её плотность можно считать постоянной и равной $\gamma(P_k)$. Тогда масса ячейки Δm_k приближенно равна произведению плотности на меру ячейки, т.е. $\Delta m_k \approx \gamma(P_k)\cdot\Delta\varPhi_k$. Суммируя массы всех ячеек, получим массу фигуры

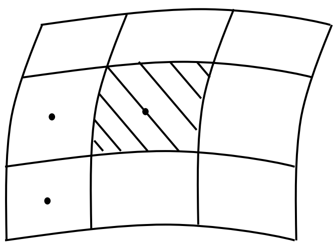


Рис. 1

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma(P_k)\cdot\Delta\varPhi_k .$$

Это приближенное равенство будет тем точней, чем меньше диаметры всех ячеек или максимальный из диаметров ячеек $d = \max diam(\Delta\Phi_k)$. Точное значение массы фигуры определяется как предел суммы при $d \to 0$

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma(P_k) \cdot \Delta\Phi_k .$$

Этот предел называют интегралом от функции $\gamma(P)$ по фигуре (Φ) и обозначают $\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)\, d\Phi.$ К пределам такого типа приводят и другие задачи. Абстрагируясь от конкретной задачи о массе фигуры, дадим общее понятие интеграла по фигуре.

Понятие интеграла по фигуре

Пусть на фигуре (Φ) определена скалярная функция $f(P)$. Так же, как и в задаче о массе фигуры, разобьем фигуру (Φ) на n ячеек $(\Delta\Phi_k)$ $(k = 1, 2, \dots n)$. В каждой ячейке $(\Delta\Phi_k)$ выберем произвольную точку P_k. Составим сумму $\sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k$. Эту сумму называют интегральной суммой функции $f(P)$ по фигуре (Φ). Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю d (максимального из диаметров ячеек).

Если существует при $d \to 0$ предел интегральной суммы функции $f(P)$ по фигуре (Φ), не зависящий от способа разбиения фигуры и выбора точек P_k, то этот предел называют **интегралом функции** $f(P)$ **по фигуре** (Φ) и обозначают $\int\limits_{(\Phi)} f(P) d\Phi$. При этом функцию $f(P)$ называют интегрируемой на фигуре (Φ).

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P) d\Phi = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k .$$

Естественно возникает вопрос: для каких функций $f(P)$ существует интеграл по фигуре (то есть существует предел интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения фигуры на ячейки и от выбора точек P_k). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую приводим без доказательства.

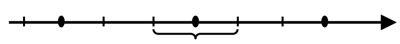
Теорема существования. Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ). Тогда существует интеграл $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi$.

Интеграл по фигуре может существовать не только для непрерывных функций, но и для кусочно-непрерывных функций. В дальнейшем будем предполагать, что интегралы, о которых идет речь, существуют.

Конкретные виды интегралов по фигуре

1). Если фигура (Φ) является отрезком $[a,b]$, то интеграл называют определенным интегралом и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$. По определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k.$$



Здесь x_k – координаты выбранных точек P_k, Δx_k – меры ячеек разбиения, т.е. длины частичных отрезков, d – максимальный из Δx_k.

2). Если фигура (Φ) является дугой кривой (l), то интеграл по такой фигуре называют **криволинейным интегралом 1-го рода** и обозначают $\int\limits_{(l)} f(P)d\,l$. По определению

$$\int\limits_{(l)} f(P)d\,l = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta l_k.$$

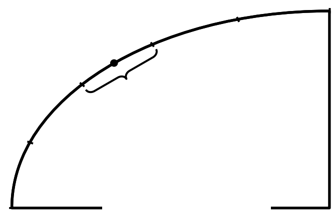


Рис.2

Здесь Δl_k – меры ячеек, в данном случае длины частичных дуг (Δl_k); d – максимальный из $diam(\Delta l_k)$ (рис. 2).

3). Если фигура (Φ) является поверхностью (σ), то интеграл по такой фигуре называют **поверхностным интегралом 1-го рода** и обозначают $\int\limits_{(\sigma)} f(P)d\sigma$. По определению

$$\int\limits_{(\sigma)} f(P)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\sigma_k.$$

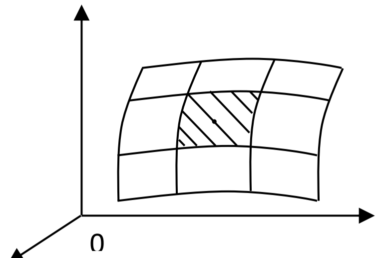


Рис. 3

Здесь $\Delta\sigma_k$ – меры ячеек, в данном случае их площади; d – максимальный из $diam(\Delta\sigma_k)$ (рис. 3).

4). Если фигура (Φ) является плоской областью (S), то интеграл по такой фигуре называют **двойным интегралом** и обозначают $\int\limits_{(S)} f(P)\,dS$. По определению

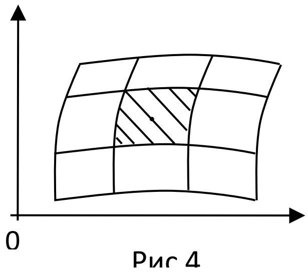


Рис 4

$$\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta S_k .$$

Здесь ΔS_k – меры ячеек, в данном случае их площади; d – максимальный из $diam(\Delta S_k)$ (рис. 4).

5). Если фигура (Φ) является телом (V), то интеграл по такой фигуре называют **тройным интегралом** и обозначают $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV$. По определению

$$\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta V_k .$$

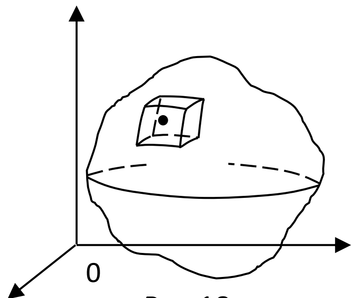


Рис.18

Здесь ΔV_k – меры ячеек, в данном случае их объёмы; d – максимальный из $diam(\Delta V_k)$ (рис. 5).

Рассмотрим еще одну часто употребляемую форму записи двойного интеграла. Двойной интеграл – это интеграл по плоской области (S). Пусть эта область лежит в плоскости XOY. Так как интеграл не зависит от способа разбиения фигуры на ячейки, то разобьём фигуру на ячейки прямыми, параллельными оси OY, с расстояниями Δx между ними и прямыми, параллельными оси OX, с расстояниями Δy между ними (рис. 5). Тогда площадь любой ячейки, кроме приграничной, равна $\Delta S = \Delta x\cdot\Delta y$. Поэтому dS и интеграл записывают в следующем виде:

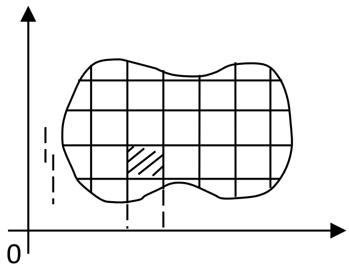


Рис.5

$dS = dx\cdot dy$,

$$\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy .$$

Аналогичная форма записи принята и для тройного интеграла

$$\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Свойства интеграла по фигуре

Пусть, как предполагалось ранее, фигура (Φ) – ограничена и замкнута, а интегралы, о которых идет речь, существуют.

1. Свойство линейности

$$\int\limits_{(\Phi)} \left(\lambda\cdot f\left(P\right)+\mu\cdot g\left(P\right)\right)d\Phi = \lambda\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi + \mu\int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi,$$

где λ и μ – константы.

Это свойство следует из определения интеграла по фигуре и свойств пределов:

$$\int\limits_{(\Phi)} \left(\lambda\cdot f\left(P\right)+\mu\cdot g\left(P\right)\right)d\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda\cdot f\left(P_k\right)+\mu\cdot g\left(P_k\right)\right)\cdot\Delta\Phi_k =$$

$$= \lambda\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\cdot\Delta\Phi_k + \mu\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} g\left(P_k\right)\cdot\Delta\Phi_k = \lambda\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi + \mu\int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi.$$

2. Свойство аддитивности

$\left(\Phi_1\right)$

$\left(\Phi_2\right)$

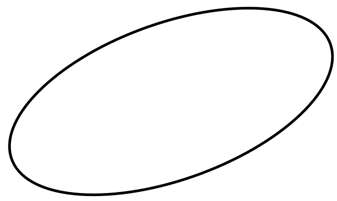


Рис.6

Пусть фигура (Φ) разбита (рис. 6) на части (Φ_1) и (Φ_2). Тогда

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi = \int\limits_{(\Phi_1)} f(P)\,d\Phi + \int\limits_{(\Phi_2)} f(P)\,d\Phi.$$

Так как интеграл по фигуре численно равен массе фигуры с плотностью $f(P)$, то физический смысл этого свойства следующий: масса всей фигуры (Φ) равна сумме масс её частей (Φ_1) и (Φ_2).

3. О вычислении меры фигуры

Мера Φ фигуры (Φ) вычисляется по формуле

$$\Phi = \int\limits_{(\Phi)} d\Phi.$$

Это свойство следует из определения интеграла по фигуре (Φ) от функции $f(P)\equiv 1$:

$$\int\limits_{(\Phi)} 1\cdot d\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta\Phi_k = \lim_{d\to 0}\Phi = \Phi.$$

В частности, из этой формулы мы имеем формулы для отыскания длины l дуги (l), площади S плоской области (S), площади σ поверхности (σ), объёма V тела (V):

$$l = \int\limits_{(l)} dl, \qquad S = \int\limits_{(S)} dS, \qquad \sigma = \int\limits_{(\sigma)} d\sigma, \qquad V = \int\limits_{(V)} dV.$$

4. Об интегрировании неравенств

Если $f(P)\le g(P)$ на фигуре (Φ), то $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} g(P)d\Phi$

Действительно, так как $f(P)\le g(P)$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\Phi_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} g(P_k)\cdot\Delta\Phi_k$ и поэтому

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\Phi_k \le \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(P_k)\cdot\Delta\Phi_k = \int\limits_{(\Phi)} g(P)d\Phi.$$

5. Об оценке интеграла

$$m\cdot\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \le M\cdot\Phi,$$

где m и $M-$ наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на фигуре (Φ).

Действительно, так как $m\le f(P)\le M$ на фигуре (Φ), то по свойствам 4, 1, 3

$$m\cdot\Phi = \int\limits_{(\Phi)} m\,d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} M\,d\Phi = M\cdot\Phi.$$

6. Об оценке модуля интеграла

$$\left|\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi\right| \le \int\limits_{(\Phi)} |f(P)|\,d\Phi.$$

Оценка модуля интеграла следует из свойств модуля: $-|f(P)| \le f(P) \le |f(P)|$.

Тогда из свойства 5 следует

$$-\int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi$$ и значит,

$$\left|\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi\right| \le \int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi.$$

7. Теорема о среднем

Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ). Тогда на (Φ) существует точка $\tilde{P}$ такая, что

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi = f\left(\tilde{P}\right)\cdot\Phi \quad \text{или} \quad f\left(\tilde{P}\right)=\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi.$$

Выведем эту формулу. Так как функция $f\left(P\right)$ непрерывна на фигуре (Φ), то она достигает на этой фигуре наименьшего m и наибольшего M значений. Поэтому $m\le f(P)\le M$ на (Φ). Тогда из соотношения (6.4) следует:

$$m\cdot\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \le M\cdot\Phi.$$

Разделим это неравенство на положительное число Φ:

$$m\le\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \le M.$$

Рассмотрим число μ, равное $\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi.$ Из равенства следует, что $m\le\mu\le M$. Так как функция $f\left(P\right)$ непрерывна на фигуре (Φ), то она принимает на этой фигуре все промежуточные значения между m и M. В частности, функция $f\left(P\right)$ принимает промежуточное значение μ в некоторой точке $\tilde{P}$ фигуры (Φ), то есть $f\left(\tilde{P}\right)=\mu$. Отсюда

$$f\left(\tilde{P}\right)=\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi = f\left(\tilde{P}\right)\cdot\Phi.$$

Замечание. Значение $f\left(\tilde{P}\right)$ из теоремы о среднем называют средним значением функции $f(P)$ на фигуре (Φ) и обозначают f_{cp}. Оно используется в прикладных задачах.

Геометрические приложения определенного интеграла

1 Площадь плоской фигуры

Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $y = y(x),\ y = 0,$ $x = a,\ x = b$, причем $y(x)$ – непрерывная неотрицательная функция на $[a,b]$ (рис. 1). Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Через точки деления проведем вертикальные прямые, которые разделят фигуру на n

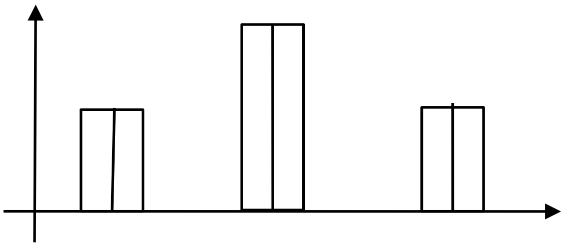


Рис. 1

вертикальных полосок. Каждую k-ю вертикальную полоску заменим прямоугольником с основанием, равным Δx_k, и высотой, равной $y(\overline{x}_k)$, где $\overline{x}_k$ – произвольно выбранная точка на k-м частичном отрезке. Площадь такого прямоугольника

$$\Delta S_k = y(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k \quad (k = 1,2,...,n).$$

Суммируя площади всех прямоугольников, получим $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} y(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k.$

Площадь S заданной фигуры определяется как предел полученной суммы $S = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} y(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k$ при стремлении к нулю $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$. Мы получили предел интегральной суммы непрерывной функции $y(x)$ по отрезку $[a,b]$, то есть интеграл $\int\limits_a^b y(x)\,dx$. Таким образом, площадь фигуры, ограниченной линиями $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$, при условии, что $y(x) \ge 0$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b y(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int\limits_a^b y\,dx.$$

Пример 1 . Вычислить интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$

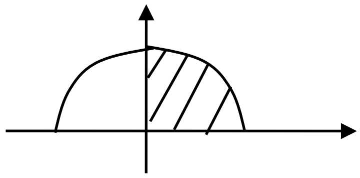


Рис. 2

Решение. Интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0,\ x = 0$, $x = a$. Построим эти линии, учитывая, что уравнение $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ определяет ту часть окружности $x^2 + y^2 = a^2$, где $y \geq 0$ (рис. 2). Полученная фигура есть четверть круга с площадью $S = \dfrac{\pi \cdot a^2}{4}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi \cdot a^2}{4}.$$

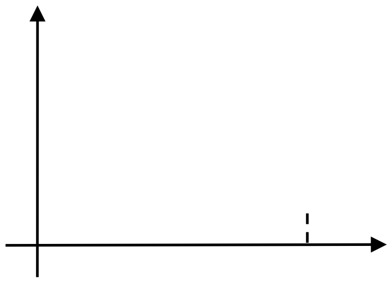


Рис. 3

Перейдем к более общему случаю. Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ x = a,\ x = b,$ причем $y_2(x) \geq y_1(x)$ на $[a, b]$ (рис. 3). Как и в предыдущем случае, можно получить следующую формулу для площади S такой фигуры:

$$S = \int\limits_a^b \left[y_2(x) - y_1(x) \right] dx.$$

Иногда вычисления значительно упрощаются, если поменять ролями оси OX и OY. Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $x = x_1(y),$ $x = x_2(y),\ \ y = c,\ y = d$, причем $x_2(y) \geq x_1(y)$ на отрезке $[c, d]$ (рис. 4). Тогда

$$S = \int\limits_c^d \left[x_2(y) - x_1(y) \right] dy.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = -1.$

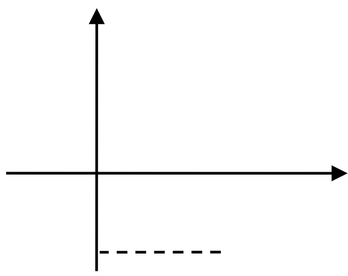


Рис. 4

Решение. Построим заданные линии и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями (рис. 5). Снизу фигура ограничена линией $y = e^x = y_1(x)$, сверху – линией $y = e^{-x} = y_2(x)$, $x \in [-1, 0]$. Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (7.11):

$$S=\int_{-1}^{0}\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx=\int_{-1}^{0}\left(e^{-x}-e^{x}\right)dx=\left(-e^{-x}-e^{x}\right)\Big|_{-1}^{0}=e+e^{-1}-2.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1$, $y=x-1$.

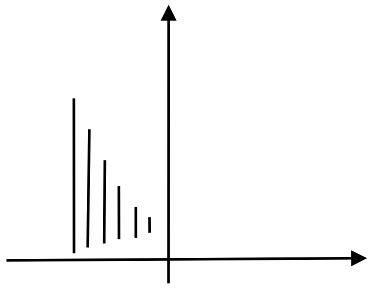
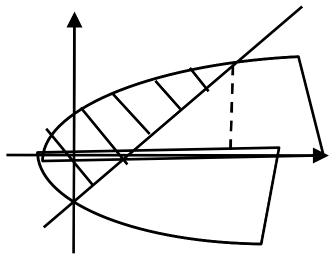


Рис. 5

Решение. Уравнение $y^2=2x+1$ или $y^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ определяет параболу с вершиной $A\left(\frac{-1}{2},0\right)$, осью симметрии – осью OX (рис. 6). Уравнение $y=x-1$ определяет прямую, проходящую через точки $(0;-1)$, $(1;0)$. Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений: $y^2=2x+1$, $y=x-1$. Получим точку $B(0;-1)$ и точку $C(4;3)$.

Вычислим площадь фигуры по формуле. Для этого нужно записать уравнения кривых, ограничивающих фигуру, в виде, разрешенном относительно x. Слева фигура ограничена дугой параболы CAB, на которой $x=\frac{y^2-1}{2}$, справа – отрезком прямой BC, на котором $x=y+1$; y меняется от $y_B=-1$ до $y_C=3$. Поэтому по формуле имеем



D

B

C

x

y

4

A

-1/2

0

Рис. 6

$$S=\int_{-1}^{3}\left[(y+1)-\frac{y^2-1}{2}\right]dy=\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-y\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}\approx 5{,}33.$$

2 Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной непрерывной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a,\ x = b$ (рис. 7). Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$ Проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные оси OX. Сечение тела вращения плоскостью $x = x_k$ есть круг радиусом $y(x_k)$ с площадью $\pi \cdot y^2(x_k)$ $(k = 1, 2, ...n)$. Проведенные плоскости разобьют тело на слои. Каждый k-й слой

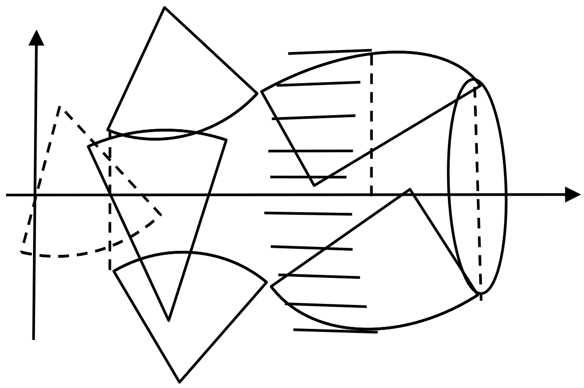


Рис.7

x

$y = y(x)$

y

b

a

y_k

x_k

0

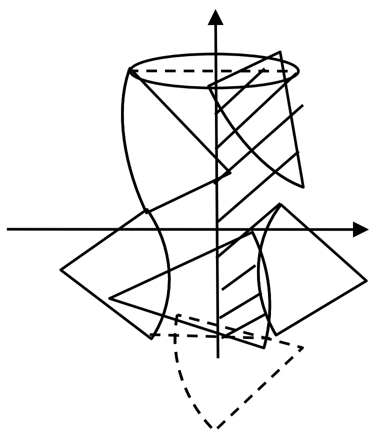


Рис.8

x

$x = x(y)$

c

d

0

y

приближенно заменим прямым цилиндром (рис. 7) с радиусом $y(x_k)$, высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и объемом $\Delta V_k = S \cdot h = \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k \quad (k = 1, 2, \ldots n).$

Сумма объемов всех цилиндров равна $\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$.

Объем тела вращения V_{OX} определяется как предел этой суммы

$$V_{OX} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$$

при стремлении к нулю величины $d = \max_{1 \le k \le n}\{\Delta x_k\}$. Мы получили предел интегральной суммы непрерывной функции $\pi \cdot y^2(x)$ по отрезку $[a, b]$, который существует и равен интегралу $\int_a^b \pi \cdot y^2(x)\, dx.$

Итак, объем V_{OX} тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле

$$V_{OX} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx, \quad \text{или} \quad V_{OX} = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Аналогично вычисляется объем V_{OY} тела, полученного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линией $x = x(y)$, осью OY, прямыми $y = c,\ y = d$ (рис. 8):

$$V_{OY} = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy, \quad \text{или} \quad V_{OY} = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1,\ x = -1,\ x = 1,\ y = 0$,

а) вокруг оси OX, б) вокруг оси OY.

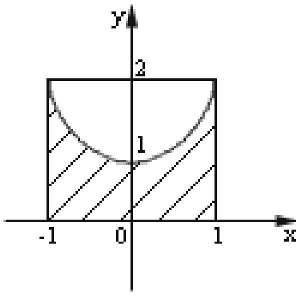


Рис.9

Решение. Построим параболу $y = x^2 + 1,$ прямые $x = -1,\ x = 1,\ y = 0$ и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями (рис. 31).

а). Объем тела, полученного при вращении этой фигуры вокруг оси OX, вычислим по формуле:

$$V_{OX} = \pi \int_{-1}^{1} y^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2\,dx.$$

Подынтегральная функция – четная, поэтому используем следствие 2 к теореме.

$$V_{OX} = 2\pi \int_{0}^{1} (x^2 + 1)^2\,dx = 2\pi \int_{0}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \frac{56}{15}\pi.$$

б). Для вычисления объема тела вращения фигуры вокруг оси OY нельзя непосредственно воспользоваться формулой, так как фигура сверху ограничена не прямой, а параболой. Поэтому сначала рассмотрим фигуру, ограниченную прямой $x = 1$, осью OY, прямыми $y = 0,\ y = 2$. При ее вращении вокруг оси OY получим цилиндр, объем которого V_1 можно вычислить по формуле $V_1 = \pi R^2 H = 2\pi$ или по формуле

$$V_1 = \pi \int_{0}^{2} x^2\,dy = \pi \int_{0}^{2} dy = 2\pi.$$

Теперь рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $y = x^2 + 1,$ осью OY и прямой $y = 2$. При ее вращении вокруг оси OY получим тело, объем которого V_2 вычислим по формуле:

$$V_2 = \pi \int_{1}^{2} x^2 dy = \pi \int_{1}^{2} (y - 1)\,dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда искомый объем V_{OY} будет равен $V_{OY} = V_1 - V_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}.$

Лекция 16. Криволинейный интеграл первого рода. Двойные интегралы. Тройные интегралы.

Случай 1. Пусть на плоскости дуга AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a,b]$. Будем предполагать, что функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной на $[a,b]$.

Рассмотрим на кривой точки $A = M_0,\ M_1\ , M_2, ..., M_n = B$ с абсциссами $a = x_0,\ x_1,\ x_2, ...,\ x_n = b$. Проведем хорды $AM_1,\ \ M_1M_2, ..., M_{n-1}B$, длины которых обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$ (рис. 1).

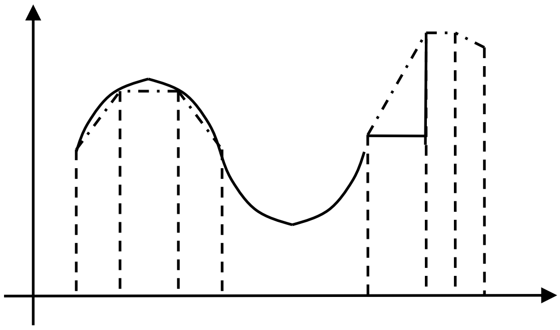


Рис. 1

Вычислим длину k-й хорды

$$\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

Для вычисления приращения Δy_k воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа

$$\Delta y_k = y(x_k) - y(x_{k-1}) = y'(\overline{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = y'(\overline{x}_k)\Delta x_k,$$

где $\overline{x}_k$ – некоторая точка из промежутка $(x_{k-1},\ x_k)$. Тогда длина $k-$й хорды

$$\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [y'(\overline{x}_k)]^2 \cdot (\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + y'^2(\overline{x}_k)} \cdot \Delta x_k.$$

Учтем это и возьмем в определении криволинейного интеграла в качестве промежуточных точек на дугах $M_{k-1}M_k$ точки $\left(\overline{x}_k, y\left(\overline{x}_k\right)\right)$:

$$\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot \Delta l_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k, y\left(\overline{x}_k\right)\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2(\overline{x}_k)}\cdot \Delta x_k.$$

Мы получили предел интегральной суммы функции $f\left(x, y(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}$ по отрезку $[a,b]$, который равен интегралу $\int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.$

Следовательно,

$$\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Итак, для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl$ по дуге AB с уравнением $y = y(x),\ \ x\in[a,b]$ нужно:

1) заменить y в подынтегральной функции на его значение $y(x)$ на дуге;

2) заменить dl на $\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$;

3) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[a,b]$.

Иногда удобнее использовать уравнение кривой в виде $x = x(y),\ y\in[c,d]$. Тогда

$$\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f\left(x(y),y\right)\cdot\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dx.$$

Пример 1. Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y,\ \ y\in[1,e]$.

Решение. Уравнение кривой разрешено относительно x, поэтому воспользуемся формулой (7.16), учитывая, что $x'_y = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} = \frac{y^2-1}{2y}$,

$$\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2} = \sqrt{1+\frac{(y^2-1)^2}{4y^2}} = \sqrt{\frac{4y^2+y^4-2y^2+1}{4y^2}} = \sqrt{\frac{\left(y^2+1\right)^2}{4y^2}} = \frac{y^2+1}{2y}.$$

Тогда $$l = \int\limits_{(l)} dl = \int\limits_{1}^{e}\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy = \int\limits_{1}^{e}\frac{y^2+1}{2y}dy = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{e}\left(y+\frac{1}{y}\right)dy = \frac{e^2+1}{4}.$$

Случай 2. Пусть на плоскости дуга AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t\in[\alpha,\beta],$$

причем функции $x = x(t),\ y = y(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$ вместе со своими производными и $x'(t)\neq 0$.

Для определенности, пусть $x'(t) > 0$. Уравнения $x = x(t),\ y = y(t)$ определяют функцию $y(x)$, которая имеет непрерывную производную y'_x.

Учитывая, что $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t},\ dx = x'_t\, dt$, получим

$$d\,l = \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\, dx = \sqrt{1+\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \cdot x'_t\, dt = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt.$$

Итак, справедливы следующие формулы $d\,l = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, d\,t$ и

$$\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\, d\,l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{x_t'^{\,2} + y_t'^{\,2}}\, d\,t.$$

Аналогично, для ***пространственной*** кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, имеем

$$d\,l = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\, d\,t,$$

$$\int\limits_{\cup AB} f(x,y,z)\, d\,l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x_t'^{\,2} + y_t'^{\,2} + z_t'^{\,2}}\, d\,t.$$

Пример 2. Найти массу верхней полуокружности радиуса R, если плотность γ в каждой её точке равна ординате этой точки.

Решение. Масса кривой вычисляется с помощью криволинейного интеграла:

$$m = \int\limits_{(L)} \gamma \cdot d\,l = \int\limits_{(L)} y \cdot d\,l.$$

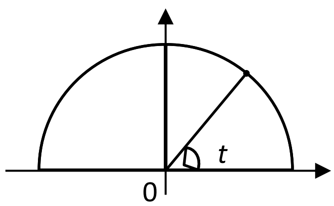


Рис. 2

Для вычисления интеграла запишем параметрические уравнения окружности: $x = R\cdot\cos t, \quad y = R\cdot\sin t$.

Параметр t есть угол между радиус-вектором точки окружности и осью OX (рис. 2). Для верхней полуокружности параметр t меняется от 0 до π. Теперь вычислим $d\,l$:

$$d\,l = \sqrt{x_t'^{\,2} + y_t'^{\,2}}\, dt = \sqrt{\left(-R\cdot\sin t\right)^2 + \left(R\cdot\cos t\right)^2}\, dt = R\,dt.$$

Подставим в искомый интеграл $\int\limits_{(L)} y\cdot d\,l$ выражения для $y,\ d\,l,$ расставим пределы изменения t и вычислим получившийся определенный интеграл:

$$m = \int\limits_0^{\pi} R\sin t \cdot R\,dt = R^2\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt = -R^2\cos t\,\Big|_0^{\pi} = 2\,R^2.$$

7.1. Двойной интеграл в прямоугольной системе

Вычисление двойного интеграла $\int\limits_{(S)} f(P)dS = \iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ сводится к вычислению двух определенных интегралов. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть область (S) в плоскости XOY ограничена линиями $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x),\ x=a,\ x=b$ (рис. 3). Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (7.18), называют повторным или двукратным. В повторном интеграле сначала следует вычислить внутренний интеграл при фиксированном x. В результате получим функцию,

$$F(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

зависящую от переменной x:
Затем вычисляют внешний интеграл от функции $F(x)$.

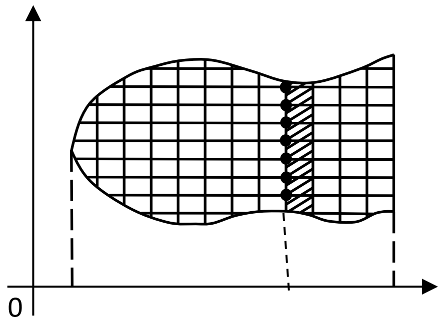


Рис. 3

Дадим нестрогое (физическое) обоснование формулы для случая неотрицательной подынтегральной функции $f(x,y)$. Как было установлено ранее, двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ равен массе пластины (S) с плотностью $f(x,y)$. Покажем, что повторный интеграл, стоящий в правой части равенства, также равен массе пластины (S). Для этого разобьём фигуру (S) на ячейки прямыми, параллельными осям координат (рис. 3). Выделим $i-$ю вертикальную полоску. В каждой её ячейке выберем точку $(x_i,\ y_k)$ так, чтобы все выбранные точки лежали на одной вертикали (рис. 3). Вычислим плотность $f(x_i,\ y_k)$ в выбранной точке и массу прямоугольной ячейки

$$m_{\text{яч.}} = \Delta m_{ik} \approx f(x_i,\ y_k)\Delta x_i\,\Delta y_k.$$

Подсчитаем массу $i-$ й вертикальной полоски m_i, просуммировав массы ячеек $\Delta m_{i1},\ \Delta m_{i2}, ..., \Delta m_{in}$ и вынеся за знак суммы общий множитель Δx_i:

$$m_i \approx \left(\sum_k f\ (x_i, y_k)\Delta y_k \right)\Delta x_i.$$

Так как выбранные точки лежат на одной вертикали, то они имеют одинаковую абсциссу x_i. Значит x_i – фиксировано в сумме $\sum_k f\left(x_i, y_k\right)\Delta y_k$, и эта сумма является интегральной суммой для функции $f(x_i, y)$ по переменной y, изменяющейся на отрезке $\left[\varphi_1\left(x_i\right), \varphi_2\left(x_i\right)\right]$ (рис. 3). При малых значениях Δy_k интегральная сумма функции близка к интегралу от этой функции, т.е.

$$\sum_k f\left(x_i, y_k\right)\Delta y_k \approx \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f\left(x_i, y\right)dy.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого приближенного равенства, является значением выше введенной функции $F(x)$ в точке x_i. Поэтому для массы вертикальной полоски имеем

$$m_i \approx F(x_i)\Delta x_i.$$

Суммируя массы вертикальных полосок, получим значение массы пластины

$$m \approx \sum_i F(x_i)\Delta x_i.$$

Сумма $\sum_i F\left(x_i\right)\Delta x_i$ является интегральной суммой функции $F\left(x\right)$ по переменной x, изменяющейся на отрезке $\left[a, b\right]$. При $\max\left\{\Delta x_i\right\} \to 0$ эта интегральная сумма стремится к интегралу $\int_a^b F(x)dx$. Подставляя выражение $F(x)$ через интеграл, получим

$$m = \int_a^b F\left(x\right)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x, y\right)dy.$$

Таким образом, масса пластины, с одной стороны, равна двойному интегралу из формулы, с другой стороны, равна двукратному интегралу из той же формулы. Следовательно, эти интегралы равны между собой.

Чтобы успешно пользоваться на практике формулой, рекомендуем:

1) построить область интегрирования;

2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения y. Для этого на чертеже (рис. 3) нужно двигаться параллельно оси

OY. При этом мы войдем в фигуру через линию, на которой $y=\phi_1(x)$, а выйдем через линию, на которой $y=\phi_2(x)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $\phi_1(x)$ до $\phi_2(x)$;

3) проецируя область (S) на ось OX, расставить внешние пределы интегрирования (это всегда – числа, а не функции);

4) вычислить внутренний интеграл при постоянном x, затем – внешний интеграл.

Случай 2. Пусть область (S) в плоскости XOY (рис. 4) ограничена линиями $x=g_1(y),\ x=g_2(y),\ y=c,\ y=d$. Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Чтобы пользоваться формулой, рекомендуем:

1) построить область интегрирования;

2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле сначала расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения x. Для этого на чертеже (рис. 4) нужно двигаться параллельно оси OX. При этом войдем в фигуру через линию $x=g_1(y)$, а выйдем через линию $x=g_2(y)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $g_1(y)$ до $g_2(y)$;

3) проецируя область (S) на ось OY, расставить внешние пределы интегрирования;

4) вычислить внутренний интеграл при постоянном y, затем – внешний интеграл.

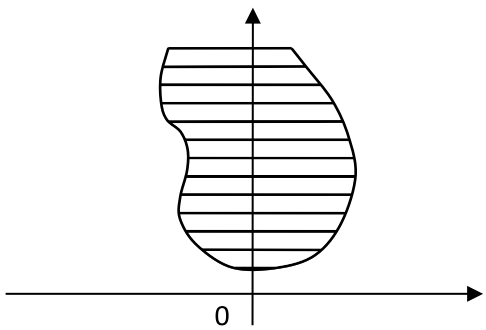


Рис. 4

Пример 1. Вычислить момент инерции относительно оси OY плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2$, $y=3-x^2$, если плотность $\gamma=1$.

Решение. Момент инерции плоской фигуры вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле при $z=0$:

$$I_{OY}=\int\limits_{(S)} x^2\gamma dS=\iint\limits_{(S)} x^2 dxdy.$$

Чтобы вычислить двойной интеграл, построим область (S) (рис. 5). Найдем точки пересечения A и B линий $y = 2x^2,\ y = 3 - x^2$. Получим $x = \pm 1$, $y = 2$. Таким образом, фигура (S) ограничена снизу линией $y = 2x^2$, сверху – линией $y = 3 - x^2$, $x \in [-1,1]$. Поэтому по формуле

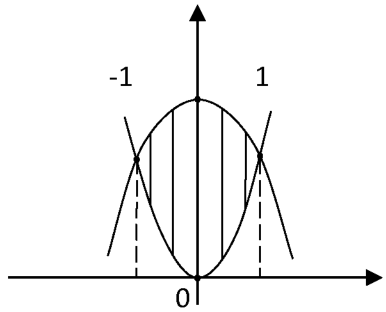


Рис. 5

$$I_{OY} = \iint\limits_{(S)} x^2\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x^2} dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \left(y \Big|_{2x^2}^{3-x^2} \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \left(3 - 3x^2 \right) dx.$$

Так как подынтегральная функция четная, то интеграл от неё по промежутку $[-1,1]$ равен удвоенному интегралу по промежутку $[0,1]$. Поэтому

$$I_{OY} = 2 \cdot 3 \int\limits_{0}^{1} (x^2 - x^4)\,dx = 6 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

Пример 7.15. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$, если плотность $\gamma = y$.

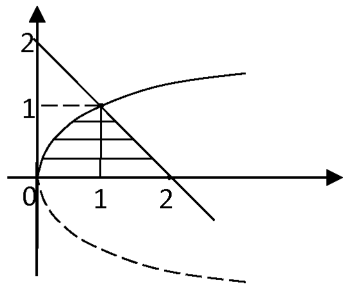


Рис. 6

Решение. Построим фигуру (рис. 6). Линия $y = \sqrt{x}$ есть верхняя половина параболы $y^2 = x$, линия $x + y = 2$ – прямая. Фигура ограничена сверху двумя линиями $y = \sqrt{x}$ и $x + y = 2$. Поэтому использовать формулу нерационально: придется разбить область на две части (S_1) и (S_2), а интеграл – на сумму двух интегралов.

Удобнее воспользоваться формулой; учитывая, что слева область ограничена дугой *OA*, на которой $x = y^2$, а справа — отрезком *AB*, на котором $x = 2 - y$, имеем:

$$m = \int\limits_{(s)} \gamma dS = \iint\limits_{(S)} y\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} y\,dy \int\limits_{y^2}^{2-y} dx = \int\limits_{0}^{1} y\left(2 - y - y^2\right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(2y - y^2 - y^3\right) dy = \frac{5}{12}.$$

Для сравнения запишем двойной интеграл по формуле:

$$m = \iint\limits_{(S)} \gamma \, dS = \iint\limits_{(S_1)} y \, dxdy + \iint\limits_{(S_2)} y \, dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y \, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} y \, dy .$$

Результат будет тот же, но объём вычислений – больше, так как придется вычислить два интеграла вместо одного.

Двойной интеграл в криволинейной системе

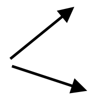
Для вычисления двойного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x,y), а некоторые другие координаты (u,v), которые часто называют криволинейными. Пусть известна связь между прямоугольными и криволинейными координатами

$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ или в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}\,(u,v)$.

Будем предполагать, что якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Введем понятие координатных линий $l_u,\ l_v$.

Координатная линия $l_u -$ это множество точек плоскости, у которых координата u меняется, а координата v фиксирована, $v = v_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}\,(u,v_0)$ есть векторно-параметрическое уравнение линии l_u; вектор $\vec{r}_u{}'(u_0,v_0)$ есть касательный вектор к линии l_u (рис. 1).



•

P_0

l_u

l_v

Рис. 1

$\vec{r}'_u$

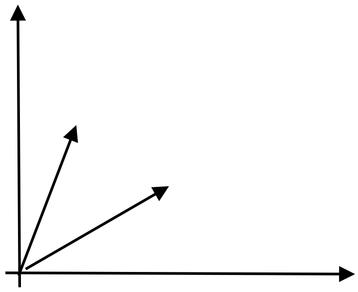
$\vec{r}'_v$

Координатная линия $l_v -$ это множество точек плоскости, у которых координата v меняется, а координата u фиксирована, $u = u_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}\,(u_0,v)$ есть векторно-параметрическое уравнение линии l_v; вектор $\vec{r}_v{}'(u_0,v_0)$ является касательным вектором к линии l_v (рис. 1).

По определению, двойной интеграл функции $f(P)$ по плоской области (S) есть предел интегральной суммы функции $f(P)$ по области (S), который не зависит от способа разбиения области (S) на ячейки:

$$\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta S_k .$$

При использовании криволинейных координат (u,v) удобно разбить область (S) на ячейки координатными линиями $l_u,\ l_v$. Выделим одну из таких ячеек (рис. 2). Рассмотрим радиус-векторы точек $P,\ P_1,\ P_2$ и векторы $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$



l_u

l_v

Рис.2

P_1
•

• P_2

$\vec r_{P_2}$

$\vec r_P$

x

y

0

P
•

$$\vec r_P = \vec r\left(u,v\right),\ \vec r_{P_1} = \vec r\left(u+\Delta u,v\right),\ \vec r_{P_2} = \vec r\left(u,v+\Delta v\right),$$

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec r_{P_1} - \vec r_P = \vec r\left(u+\Delta u,v\right) - \vec r\left(u,v\right) = \Delta_u \vec r \approx \vec r_u{}' \cdot \Delta u,$$

$$\overrightarrow{PP_2} = \vec r_{P_2} - \vec r_P = \vec r\left(u,v+\Delta v\right) - \vec r\left(u,v\right) = \Delta_v \vec r \approx \vec r_v{}' \cdot \Delta v,$$

и площадь ячейки $\Delta S \approx \left|\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}\right| \approx \left|\vec r_u{}' \times \vec r_v{}'\right| \Delta u\,\Delta v.$

Так как $\vec r_u{}' \times \vec r_v{}' = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_u' & y_u' & 0 \\ x_v' & y_v' & 0 \end{vmatrix} = \vec k \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix} = \vec k\ \dfrac{D\left(x,y\right)}{D\left(u,v\right)}$, то $\Delta S \approx \left|\dfrac{D\left(x,y\right)}{D\left(u,v\right)}\right| \Delta u\,\Delta v.$

Введем так называемый ***элемент площади в криволинейных координатах***

$$d\,S=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv$$

Можно показать (строгое доказательство опускаем), что

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S^*)} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv.$$

Итак, получили следующее правило:

Для вычисления двойного интеграла $\int\limits_{(S)} f(P)\,dS=\int\limits_{(S)} f(x,y)\,dS$ следует

1) заменить $x,\ y,\ dS$ на их выражения в криволинейной системе координат:

$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$, $d\,S=\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv$;

2) заменить область (S) изменения переменных (x,y) на область (S^*) изменения переменных (u,v).

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=I$, а якобиан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=I_1$.

Можно показать, что $I=\dfrac{1}{I_1}$ (по аналогии с производной обратной функции $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$).

Пример 2. Найти массу пластины, ограниченной линиями $y^2=x,\ y^2=3x,$ $x^2=y,\ x^2=2y,$ если плотность $\gamma=x\,y$.

Решение. Массу пластины вычислим по формуле $m=\iint\limits_{(S)}\gamma\,dS$.

В этой формуле фигура (S) есть криволинейный четырехугольник $ABCD$ (рис. 3), ограниченный параболами $y^2=x,\ y^2=3x$ с осью симметрии OX и параболами $x^2 = y,\ x^2 = 2y$ с осью симметрии OY.

Вычисление массы фигуры (S) в прямоугольных координатах громоздко: нужно найти точки пересечения парабол, разбить фигуру (S) на три части и вычислить три интеграла. Удобнее ввести криволинейные координаты $u = \dfrac{y^2}{x},\quad v = \dfrac{x^2}{y}$ (учитывая, что на границе области они постоянны: $u = 1,\ u = 3,\ v = 1,\ v = 2$) и вычислить якобиан

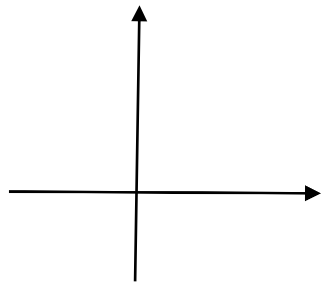


Рис. 3

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & \dfrac{-x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3.$$

Тогда $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{1}{3},\quad dS = \dfrac{1}{3}du\,dv,\quad \gamma = xy = uv;$

$$m = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S^*)} uv\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_1^3 u\,du \int_1^2 v\,dv = 2.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Двойной интеграл в некоторых случаях, например, когда область интегрирования есть круг, сектор или ограничена линией, уравнение которой содержит $x^2 + y^2$, удобнее и проще вычислять в полярной системе координат.

Вспомним некоторые сведения о полярной системе координат. Полярная система состоит из полярной оси с началом в полюсе 0. Положение точки P на плоскости характеризуется двумя полярными координатами ρ и ϕ, где ρ – длина радиус-вектора точки P, ϕ – угол наклона радиус-вектора к полярной оси (рис. 4). Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 4. Тогда между прямоугольными координатами (x, y) точки P и её полярными координатами (ρ, ϕ) существует следующая связь:

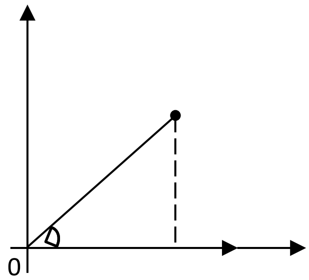


Рис. 4

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Вычислим якобиан

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Тогда из формул получим

$$dS = \rho\, d\rho\, d\varphi, \quad \int\limits_{(S)} f(P)dS = \iint\limits_{(S)} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho\, d\varphi.$$

Пусть область (S) заключена (рис. 4) между лучом OA с уравнением $\phi = \alpha$ и лучом OB с уравнением $\phi = \beta$ и ограничена дугой A_1B_1 с уравнением $\rho = \rho_1(\phi)$ и дугой AB с уравнением $\rho = \rho_2(\phi)$. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_{(S)} f(P)dS = \iint\limits_{(S)} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\,.$$

Чтобы применять на практике формулу, рекомендуем:

1) построить область интегрирования;

2) в двойном интеграле $\int\limits_{(S)} f(P)dS = \int\limits_{(S)} f(x,y)dS$ заменить $x,\ y,\ dS$, на их выражения в полярной системе координат, т.е. $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$;

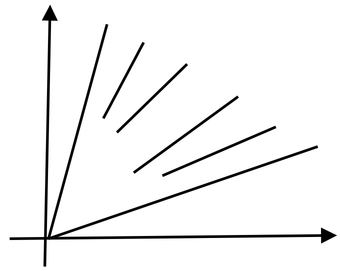
3) записать получившийся двойной интеграл через повторный по формуле (7.23); в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ. Для этого надо двигаться <u>по лучу</u>, выходящему из полюса (рис. 5); на нем ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$;

4) расставить <u>внешние</u> пределы интегрирования, определив лучи $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$, между которыми заключена фигура (внешние пределы всегда <u>числа</u>, а не функции);

5) вычислить внутренний интеграл при постоянном ϕ, затем – внешний интеграл.

Замечания

1). Полярной системой координат удобно пользоваться, если область интегрирования ограничена окружностью или линией $\rho = \rho(\varphi)$, или линией, уравнение которой содержит $x^2 + y^2$.



(S)

0

$\rho = \rho_2(\varphi)$

$\varphi = \alpha$

$\varphi = \beta$

x

y

Рис. 5

A

A_1

B

B_1

$\rho = \rho_1(\varphi)$

2). Если уравнение линии, ограничивающей область, или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то удобно перейти к обобщенным полярным координатам

$x = a \cdot \rho \cos\varphi, \quad y = b \cdot \rho \sin\varphi$; тогда $dS = ab \cdot \rho \; d\rho \; d\varphi$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{ab}.$$

Решение. Сначала построим линию, исследуя её уравнение. Выражение $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2$ неотрицательно, значит, и $2xy$ неотрицательно, т.е. линия находится в первой и третьей четвертях. Уравнение линии не изменится при замене x на $(-x)$ и y на $(-y)$. Значит, эта линия симметрична относительно начала координат и её достаточно построить в первой четверти, а затем воспользоваться симметрией.

Наличие в уравнении линии выражения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ наводит на мысль воспользоваться обобщенными полярными координатами $x=a\cdot\rho\cos\varphi,\quad y=b\cdot\rho\sin\varphi$.

Тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2$ и уравнение линии примет вид

$\rho^4=2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi$, или $\rho^2=\sin 2\varphi$, или $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Как отмечалось, достаточно сначала построить линию в первой четверти, т.е. для ϕ, принадлежащих отрезку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого составим следующую таблицу:

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
ρ	0	$\approx 0{,}8$	1	$\approx 0{,}8$	0

Построим точки с вычисленными координатами (ϕ,ρ), соединим их плавной линией, которую затем, воспользовавшись свойством симметрии, отобразим зеркально относительно начала координат (рис. 6).

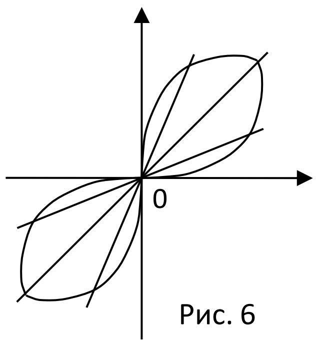


Рис. 6

Вычислим площадь S_0 той части фигуры, которая расположена в первой четверти:

$$S_0=\int\limits_{(S_0)}dS=\iint\limits_{(S_0)}ab\,\rho\,d\rho\,d\varphi=ab\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\;d\rho.$$

Чтобы расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ, будем двигаться в области (S_0) по лучам, выходящим из полюса. На каждом таком луче ρ меняется от значения $\rho = 0$ в точке 0 до значения $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$ на линии, ограничивающей область (S_0). Кроме того, эта область заключена между лучами $\phi = 0$ и $\phi = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S_0 = ab \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho \, .$$

Вычислим повторный интеграл, начиная с вычисления внутреннего интеграла

$$S_0 = ab \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{ab}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi = -\frac{ab}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}, \quad S = 2S_0 = ab.$$

Пример 2. Доказать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Решение. Вычислим вспомогательный интеграл $\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$ для двух областей:

а) если $(D)-$ круг $x^2 + y^2 \le R^2$, то, переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \iint\limits_{(D)} e^{-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(e^{-\rho^2} \Big|_0^R \right) d\varphi = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right);$$

при $R \to \infty$ область (D), расширяясь, заполнит всю плоскость (обозначим ее D_∞) и

$$\iint\limits_{(D_\infty)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \pi \left(1 - e^{-R^2} \right) = \pi;$$

б) если $(D)-$ квадрат $-a \le x \le a, \ -a \le y \le a$, то

$$\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2} dy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right)^2 ;$$

при $a \to \infty$ область (D), расширяясь, опять заполнит всю плоскость (D_∞) и

$$\iint\limits_{(D_\infty)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Итак, $$\iint\limits_{(D_\infty)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Тройной интеграл, его основные свойства.

1. Тройной интеграл в прямоугольной системе

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению определенного и двойного интегралов. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ (рис. 1,а). Цилиндрическая поверхность может и отсутствовать (рис. 1,б). Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{xy})} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Здесь (V_{xy}) – есть проекция тела (V) на плоскость XOY (рис. 1).

Обоснование формулы проводится так же, как и для двойного интеграла.

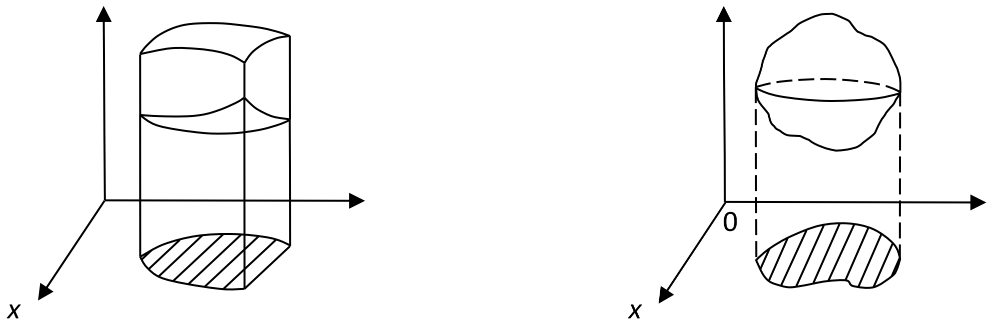


Рис. 1

Чтобы применять формулу на практике, рекомендуем:

1) построить тело (V);

2) записать тройной интеграл через повторный интеграл; в повторном интеграле сначала расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z. При этом переменная интегрирования z меняется от $z_1(x,y)$ на нижней поверхности до $z_2(x,y)$ на верхней поверхности;

3) вычислить внутренний интеграл при фиксированных x, y;

4) вычислить внешний интеграл по проекции тела (V) на плоскость XOY.

Случай 2. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $y = y_1(x,z)$, $y = y_2(x,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OY. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{yz})} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

Случай 3. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $x = x_1(y,z)$, $x = x_2(y,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{yz})} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

Для вычисления тройных интегралов надо уметь строить поверхности с заданными уравнениями. Дадим следующие рекомендации.

1. Если уравнение поверхности не содержит одной переменной, например, уравнение $F(x,y)=0$ не содержит z, то поверхность является цилиндрической с образующими, параллельными оси OZ. Сначала строим направляющую с заданным уравнением $F(x,y)=0$, затем через её точки проводим образующие, параллельные оси OZ.

2. Если уравнение поверхности содержит переменные x, y, z, то удобно строить поверхность методом сечения плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ или параллельными им плоскостями.

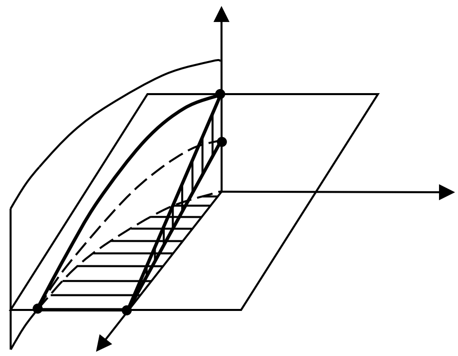


Рис. 2

Пример 1. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $y=-\sqrt{x}$, $y=0$, $x+z=3$, $x+3z=3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие тело. В уравнении $y=-\sqrt{x}$ отсутствует z, следовательно, это уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ. Направляющая в плоскости XOY имеет уравнение $y=-\sqrt{x}$ (или $y^2 = x$, $y \le 0$), которое определяет левую часть параболы. Строя направляющую и образующие, проходящие через её точки (рис. 2), получим цилиндрическую поверхность (σ_1). Уравнение $y=0$ определяет плоскость XOZ.

Следующее уравнение $x+z=3$ есть уравнение первой степени, значит, оно определяет плоскость. В уравнении отсутствует y, значит, плоскость параллельна оси OY. Кроме того, при $x=0$ имеем $z=3$, при $z=0$ имеем $x=3$. Через полученные две точки A и B проводим плоскость (σ_2), параллельную оси OY. Эта плоскость пересечет плоскость XOZ по отрезку AB, а цилиндрическую поверхность – по дуге AC (рис. 2).

Аналогично, уравнение $x+3z=3$ определяет плоскость, параллельную оси OY, пересекающую плоскость XOZ по отрезку BD, а цилиндрическую поверхность – по дуге DC.

Объём тела, ограниченного рассмотренными поверхностями, найдем по одной из формул (6.6):

$$V=\int\limits_{(V)} dV=\iiint\limits_{(V)} dxdydz.$$

Запишем тройной интеграл через повторный по формуле. Чтобы расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z, будем двигаться параллельно оси OZ. При этом z меняется от $z=\dfrac{3-x}{3}$ на плоскости BDC до $z=3-x$ на плоскости ABC. Поэтому

$$V=\int\limits_{(V_{xy})} dxdy \int\limits_{(3-x)/3}^{3-x} dz=\iint\limits_{(V_{xy})}\left[(3-x)-(3-x)/3\right]dxdy=\frac{2}{3}\iint\limits_{(V_{xy})}(3-x)dxdy.$$

Здесь (V_{xy}) есть проекция тела (V) на плоскость XOY, т.е. криволинейный треугольник OBC. Вычислим теперь двойной интеграл. Для этого запишем его через повторный интеграл с внутренним интегрированием по y. Для выяснения пределов изменения y будем двигаться в области OBC параллельно оси OY. При этом y меняется от $y=-\sqrt{x}$ на дуге OC до $y=0$ на отрезке OB. Поэтому

$$V=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{0}(3-x)dy.$$

Вычисляя сначала внутренний интеграл при фиксированном x, а затем внешний интеграл, получим

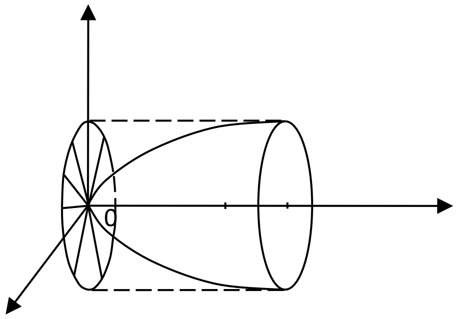


Рис. 3

$$V = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left(3\cdot x^{3/2}\cdot\frac{2}{3} - x^{5/2}\cdot\frac{2}{5}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

Пример 2. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=y$, $y=4$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие тело. Первую поверхность с уравнением $x^2+z^2=y$ построим методом сечений. В сечении плоскостью $x=0$ получим параболу $z^2=y$ с осью симметрии – осью OY (рис. 2). В сечении плоскостью $y=4$ получим окружность $x^2+z^2=4$. По этим сечениям видно, что уравнение $x^2+z^2=y$ определяет параболоид. Вторая поверхность – плоскость $y=4$ – отсекает от параболоида его часть, изображенную на рис. 2.

Центр тяжести полученного однородного тела, в силу его симметрии, находится на оси OY (в точке C). Следовательно, $x_c=z_c=0$. Координату y_c центра тяжести тела найдем с помощью тройных интегралов по формулам:

$$y_c = \frac{1}{m}\int_{(V)} \gamma\cdot y\,dV, \text{ где } m = \int_{(V)} \gamma\,dV.$$

Так как тело однородное, то его плотность γ является постоянной величиной и её можно вынести за знак интеграла. Поэтому

$$y_c = \frac{\gamma\int_{(V)} y\,dV}{\gamma\int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(V)} y\,dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Вычислим сначала интеграл I_1, стоящий в числителе; для этого запишем его в виде повторного интеграла с внутренним интегрированием по y. Для выяснения пределов изменения y будем двигаться параллельно оси OY. При этом y меняется от $y=x^2+z^2$ на поверхности параболоида до $y=4$ на плоскости. Поэтому

$$I_1 = \int_{(V)} y\,dV = \iiint_{(V)} y\,dx\,dy\,dz = \iint_{(V_{xz})} dx\,dz \int_{x^2+z^2}^{4} y\,dy.$$

Сначала вычислим внутренний интеграл

$$I_1=\iint_{(V_{xz})} dx\,dz\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2+z^2}^{4}=\frac{1}{2}\iint_{(V_{xz})}\left[16-\left(x^2+z^2\right)^2\right]dx\,dz$$
.

Так как проекция (V_{xz}) тела (V) на плоскости XOZ есть круг, то получившийся двойной интеграл удобно вычислять в полярной системе координат, заменяя x^2+z^2 на ρ^2, а $dxdz=dS$ на $\rho d\rho d\phi$. Тогда получим

$$I_1=\frac{1}{2}\iint_{(V_{xz})}\left[16-\rho^4\right]\rho\,d\rho\,d\varphi$$
.

Двойной интеграл запишем через повторный с внутренним интегрированием по ρ.

Так как сечение параболоида $x^2+z^2=y$ плоскостью $y=4$ есть окружность $x^2+z^2=4$ радиуса 2, то ρ меняется от 0 до 2; ϕ меняется от 0 до 2π и, следовательно,

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(16-\rho^4\right)\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(8\rho^2-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{64\pi}{3}$$
.

Аналогично вычисляется интеграл I_2:

$$I_2=\int_{(V)}dV=\iiint_{(V)}dx\,dy\,dz=\iint_{(V_{xz})}dx\,dz\int_{x^2+z^2}^{4}dy=\iint_{(V_{xz})}\left[4-\left(x^2+z^2\right)\right]dx\,dz=$$

$$=\iint_{(V_{xz})}\left[4-\rho^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(4-\rho^2\right)\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi$$
.

Итак, $y_c=\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{8}{3}$ и центр тяжести данного тела находится в точке $C\left(0,\dfrac{8}{3},0\right)$.

2 Тройной интеграл в криволинейной системе

Для вычисления тройного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x,y,z), а некоторые криволинейные координаты (u,v,w). Пусть известна связь между этими координатами

$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$ и $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$.

Аналогично случаю двойного интеграла можно показать, что

$$dV = dx\,dy\,dz = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw,$$

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(V^*)} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\right| du\,dv\,dw.$$

Здесь (V) и (V^*) – области изменения соответственно переменных (x,y,z) и (u,v,w).

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \int\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$ следует

1) заменить $x,\ y, z,\ dV$ на их выражения в криволинейной системе координат,

$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$, $dV = \left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$;

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область (V^*) изменения переменных (u,v,w).

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = I,$ а якобиан $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = I_1$. Тогда искомый якобиан $I = \dfrac{1}{I_1}$.

Пример 3. Вычислить объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями $a_1 x + b_1 y + c_1 z = \pm h_1,\ \ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \pm h_2,\ \ a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h_3.$

Решение. Введем новые переменные

$u = a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ \ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ \ w = a_3 x + b_3 y + c_3 z$ и вычислим

якобиан $$\Delta = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда искомый объем равен

$$V = \int\limits_{(V^*)} dV = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V^*)} \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)} \right| du\,dv\,dw = \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{-h_1}^{h_1} du \int\limits_{-h_2}^{h_2} dv \int\limits_{-h_3}^{h_3} dw = \frac{8 h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}.$$

3 Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно охарактеризовать с помощью цилиндрических координат (ρ,φ,z), где $\rho,\varphi -$ полярные координаты проекции точки M на плоскость $XOY,\ z -$ аппликата точки M. Поэтому аналогично полярной системе координат

$$x = \rho\cdot\cos\varphi,\ \ y = \rho\cdot\sin\varphi,\ \ z = z.$$

Вычислим якобиан $$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Тогда ***элемент объема в цилиндрических координатах***

$$dV = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz.$$

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)dV = \int\limits_{(V)} f(x,y,z)dV$ следует

1) заменить $x,\ y, z,\ dV$ на их выражения в цилиндрической системе координат,

$$x = \rho\cdot\cos\varphi,\ \ y = \rho\cdot\sin\varphi,\ \ z = z,\quad dV = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz;$$

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область (V^*) изменения переменных (ρ,φ,z).

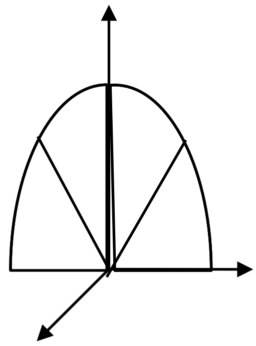
Замечания

1). К цилиндрическим координатам целесообразно переходить, когда уравнение

поверхностей, ограничивающих тело, содержит $x^2 + y^2$.

2). Внутреннее интегрирование обычно удобно вести по z.

Пример 4. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2,\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если плотность $\gamma = z$.



x

y

z

6

Рис. 4

O

Решение. Поверхность $z = 6 - x^2 - y^2$ строим методом сечений:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 6 - y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$ Получаем параболоид (рис. 4).

Поверхность $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ также строим методом сечений

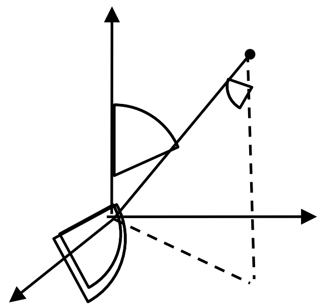
$$\begin{cases} x = 0, \\ z = |\,y\,|, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$ Получаем конус (рис. 4).

В цилиндрической системе координат уравнения этих поверхностей имеют более простой вид: $z = 6 - \rho^2,\ \ z = \sqrt{\rho^2} = \rho.$ Решив систему из этих двух уравнений, найдем пересечение этих поверхностей ─ окружность $\rho = 2.$

Вычислим массу тела, используя для вычисления интеграла цилиндрическую систему координат, учитывая, что $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, внутреннее интегрирование ─ по z, причем на прямой, параллельной оси OZ, z меняется от $z = \rho$ на конусе до $z = 6 - \rho^2$ на поверхности параболоида (рис. 4):

$$m = \int\limits_{(V)} \gamma\, dV = \iiint\limits_{(V)} z\ \rho\ d\rho\, d\varphi\, dz = \iint\limits_{(V_{xy})} \rho\ d\rho\, d\varphi \int\limits_{\rho}^{6-\rho^2} z\, dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left[\left(6 - \rho^2\right)^2 - \rho^2\right] \rho\ d\rho = \frac{92}{3}\pi.$$

4. Тройной интеграл в сферических координатах.



Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно охарактеризовать с помощью сферических координат (r,θ,φ), где $r -$ длина радиус-вектора точки M (рис. 1, $\theta -$ угол отклонения радиус-вектора точки M от оси OZ $(0 \le \theta \le \pi)$, $\varphi -$ угол отклонения проекции на плоскость XOY радиус-вектора точки M от оси OX $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

φ O

M

P

r

θ

x

y

z

Рис. 1

0

Установим связь между прямоугольными и сферическими координатами. Из прямоугольного треугольника OMP имеем $OP = r \cdot \sin\theta,\;\; z = MP = r \cdot \cos\theta$. Так как $x = OP \cdot \cos\varphi,\;\; y = OP \cdot \sin\varphi$, то

$$x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi, \;\; z = r \cdot \cos\theta; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Вычислим якобиан

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по элементам третьей строки

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}+r\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=r^2\sin\theta\cos^2\theta+r^2\sin^3\theta=r^2\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r^2\sin\theta>0.$$

Тогда ***элемент объема в сферических координатах***

$$dV=r^2\sin\theta\cdot dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV=\int\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$ следует

1) заменить $x,\ y,z,\ dV$ на их выражения в сферической системе координат,

$x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi,\quad z=r\cdot\cos\theta,\qquad dV=r^2\sin\theta\cdot dr\,d\theta\,d\varphi;$

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область (V^*) изменения переменных (r,θ,φ).

Замечания

1). К сферическим координатам целесообразно переходить, когда тело ограничено сферой $r=const$, конусом $\theta=const$ или поверхностью, уравнение которой содержит $x^2+y^2+z^2$.

2). Наиболее удобен порядок интегрирования (слева направо) по $\varphi,\ \theta,\ r$.

3). Сначала расставить пределы интегрирования по r (двигаясь по лучу из начала координат), потом — по θ (двигаясь от оси OZ), потом — по φ.

4). Если уравнение границы области или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, то следует перейти к обобщенным сферическим координатам

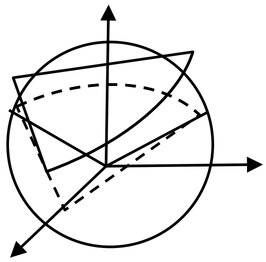
$x=a\cdot r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\cdot r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cdot r\cos\theta;$ тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$,

$$dV=abc\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Пример 1. Вычислить момент инерции относительно плоскости XOY однородного (с плотностью γ) тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2=3z^2\quad(z\geq 0)$.

Решение. Момент инерции тела вычислим по формуле

$$I_{xy} = \int\limits_{(V)} z^2 \gamma \, dV = \gamma \int\limits_{(V)} z^2 \, dV.$$



x

z

y

Рис. 2

o

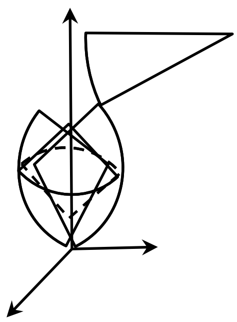
Так как тело ограничено сферой и конусом (рис. 2), то перейдем к сферическим координатам. При этом, учитывая формулы (7.30), уравнение сферы примет вид $r^2 = R^2$ или $r = R$; уравнение конуса примет вид

$r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi = 3r^2\cos^2\theta$, или $\operatorname{tg}^2\theta = 3$, или $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Используя формулы, получим

$$I_{xy} = \gamma \int\limits_{(V)} z^2 \, dV = \gamma \iiint\limits_{(V)} r^2 \cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = -\gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \cos^2\theta \; d\cos\theta \int\limits_0^R r^4 dr = \frac{7}{60}\pi\gamma R$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью



z

y

Рис. 3

o

x

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2\right)^3 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) = z^2 \quad (z \ge 0).$$

Решение. Перейдем к обобщенным сферическим координатам $x = 2r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = 3r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$. В этих координатах

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2\sin^2\theta$$

и уравнение поверхности примет вид

$r^6 \cdot r^2 \sin^2\theta = r^2\cos^2\theta$ или $r = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}$.

По условию $z \geq 0$, поэтому $\operatorname{ctg}\theta \geq 0$ и $\theta \in (0, \pi/2]$. Составим таблицу:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
r	∞	1	0

Построим точки с вычисленными координатами (r, θ, φ) сначала при $\varphi = \pi/2$, т.е. в

плоскости YOZ (рис. 3). Так как уравнение поверхности $r = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}$ от φ не зависит, то при любом φ получим такую же линию; все эти линии образуют поверхность вращения (рис. 3). Объем тела, ограниченного этой поверхностью, вычислим с учетом соотношения при $a = 2,\ b = 3,\ c = 1$:

$$V = \int\limits_{(V)} dV = \iiint\limits_{(V)} 2 \cdot 3 \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi .$$

Чтобы расставить пределы изменения r, будем двигаться в области (V) по лучам, выходящим из начала координат. На каждом таком луче r меняется от значения $r = 0$ в начале координат до значения $r = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}$ на поверхности, ограничивающей область (V). Кроме того, эта область заключена между лучами $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Поэтому

$$V = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}} r^2 \, dr = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{\sin\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta}_{=\cos\theta} \, d\theta = 4\pi .$$

1 Поверхностный интеграл первого рода

Вычисление поверхностного интеграла 1 рода $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\, d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть гладкая поверхность (σ) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \quad \text{или} \quad \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in (S).$$

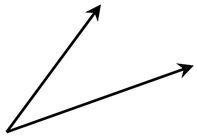
По определению, поверхностный интеграл функции $f(P)$ по поверхности (σ) есть предел интегральной суммы функции $f(P)$, который не зависит от способа разбиения поверхности (σ) на ячейки:

$$\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\sigma_k .$$

Удобно разбить поверхность (σ) на ячейки координатными линиями $l_u,\ l_v$. Выделим одну из таких ячеек (рис. 4). Рассмотрим радиус-векторы точек $P,\ P_1,\ P_2$:

$\vec r_P = \vec r\left(u,v\right),\ \vec r_{P_1} = \vec r\left(u+\Delta u, v\right),\ \vec r_{P_2} = \vec r\left(u, v+\Delta v\right).$ Тогда

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec r_{P_1} - \vec r_P = \vec r\left(u+\Delta u, v\right) - \vec r\left(u,v\right) = \Delta_u \vec r \approx \vec r_u{}' \cdot \Delta u ,$$



l_u

l_v

Рис.4

P_1

•

P_2

$\vec r_{P_2}$

0

P

$\vec r_P$

$$\overrightarrow{PP_2} = \vec r_{P_2} - \vec r_P = \vec r\left(u, v+\Delta v\right) - \vec r\left(u,v\right) = \Delta_v \vec r \approx \vec r_v{}' \cdot \Delta v ,$$

и площадь ячейки $\Delta\sigma \approx \left|\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}\right| \approx \left|\vec r_u{}' \times \vec r_v{}'\right| \Delta u\,\Delta v.$

По аналогии с этим ***элемент площади поверхности***

$$d\,\sigma = \left|\vec r_u{}' \times \vec r_v{}'\right| du\,dv .$$

Можно показать (строгое доказательство опускаем), что

$$\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(S)} f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\cdot\left|\vec r_u{}' \times \vec r_v{}'\right| du\,dv.$$

Итак, получили следующее правило:

Для вычисления поверхностного интеграла $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma$ следует

1) в подынтегральной функции подставить вместо $x,\ y,z$ их значения на поверхности (σ), т.е. $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$,

2) заменить элемент площади $d\sigma$ на выражение $d\,\sigma = \left| \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right| du\,dv$;

3) вычислить получившийся двойной интеграл по области (S) изменения переменных (u,v).

Случай 2. Пусть гладкая поверхность (σ) задана уравнением, разрешенным относительно z: $z = z(x,y)$. Присоединив два очевидных тождества, получим параметрические уравнения поверхности (σ)

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = z(x,y), \end{cases}$$

($x, y -$ параметры); тогда

$$\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x\,\vec{i} - z'_y\,\vec{j} + \vec{k},$$

и по формуле (7.34) получим $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$.

Итак, для вычисления поверхностного интеграла $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma$ следует:

1) в подынтегральной функции заменить z его значением $z(x,y)$ на поверхности (σ),

2) заменить элемент площади $d\sigma$ на выражение $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$,

3) вычислить получившийся двойной интеграл по проекции (σ_{xy}) поверхности (σ) на плоскость XOY.

Случай 3. Пусть гладкая поверхность (σ) задана уравнением, разрешенным относительно x: $x = x(y,z)$. Тогда

$$d\sigma = \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\;dy\,dz;$$

$$\int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} f\big(x(y,z),y,z\big)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dy\,dz.$$

Здесь (σ_{yz}) есть проекция поверхности (σ) на плоскость YOZ.

Случай 4. Пусть гладкая поверхность (σ) задана уравнением, разрешенным относительно y: $y = y(x,z)$. Тогда

$$d\sigma = \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz;$$

$$\int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} f\big(x,y(x,z),z\big)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz.$$

Здесь (σ_{xz}) есть проекция поверхности (σ) на плоскость XOZ.

Пример 1. Найти массу однородной поверхности $x^2+y^2=z^2$, $(0 \le z \le 3)$, если $\gamma = z$.

Решение. Построим поверхность $x^2+y^2=z^2$ методом сечений. В сечении $x=0$ получаем $y^2=z^2$ или $y=\pm z$. Это – пара прямых в плоскости YOZ (рис. 5). В сечении $z=3$ получаем окружность $x^2+y^2=3^2$. Таким образом, уравнение $x^2+y^2=z^2$ определяет коническую поверхность. Массу поверхности найдем с помощью поверхностного интеграла:

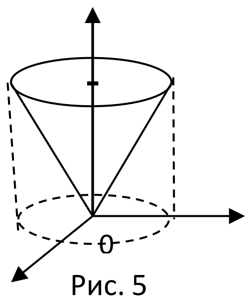


Рис. 5

$$m = \int\limits_{(\sigma)} \gamma\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma.$$

Для вычисления этого интеграла уравнение поверхности удобно разрешить относительно z: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Найдем z'_x, z'_y и затем $d\sigma$ по первой из формул:

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$$

Теперь вычислим $\int\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma$, подставляя значение z на поверхности $\left(z=\sqrt{x^2+y^2}\right)$ и

значение $d\sigma=\sqrt{2}\,dx\,dy$:

$$m=\int\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy\,.$$

Здесь $\left(\sigma_{xy}\right)$ есть проекция конической поверхности (σ) на плоскость XOY, т.е. круг радиусом 3 (рис. 5). Двойной интеграл по кругу удобнее вычислять в полярной системе координат. Для этого заменим x^2+y^2 на ρ^2, а $dx\,dy$ на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Получим

$$m=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\rho^2 d\rho d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho^2 d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi=18\pi\sqrt{}\,.$$

Пример 2. Найти момент инерции относительно начала координат полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(z\ge 0)$, если плотность $\gamma=z$.

Решение. Момент инерции относительно начала координат <u>поверхности</u> найдем с помощью <u>поверхностного</u> интеграла по второй из формул (6.13) :

$$I_0=\int\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2+z^2)\,\gamma\,d\sigma\,.$$

На поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\gamma=z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому

$$I_0=\int\limits_{(\sigma)}R^2\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma\,.$$

Для вычисления этого интеграла разрешим уравнение поверхности относительно z, найдем z'_x, z'_y и затем $d\sigma$ по первой из формул:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad z'_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,;$$

$$d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\frac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,.$$

Подставляя выражение для $d\sigma$ в интеграл, получим

$$I_0 = \int\limits_{(\sigma)} R^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma = R^2 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} == R^3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dxdy$$

.

Проекция (σ_{xy}) полусферы на плоскость XOY есть круг радиусом R; $\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dxdy$ равен площади πR^2 этого круга. Поэтому

$$I_0 = R^3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dxdy = R^3 \cdot \pi R^2 = \pi R^5$$

.

Лекция 17. Теория скалярного и векторного поля

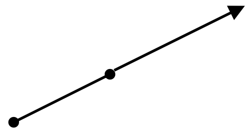
1 Скалярное поле

Скалярное поле – это область пространства, в которой задана скалярная функция $f(x, y, z)$, называемая функцией поля. Например, это может быть поле температур, поле давлений и т.д.

Множество точек поля, в которых функция поля $f(x, y, z)$ принимает постоянное значение c, образует поверхность с уравнением $f(x, y, z) = c$, называемую ***поверхностью уровня*** поля. Если скалярное поле плоское, например, находится в плоскости XOY, то его функция поля $f(x, y)$ зависит от двух переменных x и y, а множество точек, в которых $f(x, y) = c$, образуют ***линию уровня***. Линии уровня используются при составлении географических карт (для изображения точек, расположенных на одинаковой высоте над уровнем моря), при составлении метеорологических карт (для изображения линий одинаковых температур – изотерм и линий одинакового давления – изобар).

2 Производная поля по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $f(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной поля по направлению. Пусть задана точка M и вектор $\vec{l}$, выходящий из точки M (рис. 1). Рассмотрим точку M_1, лежащую на векторе $\vec{l}$, и величину $f(M_1) - f(M) = \Delta f(M)$ – приращение функции поля $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$.



M

M_1

$\vec{l}$

Δl

Рис. 1

Производной поля $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ называют величину

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{f(M_1) - f(M)}{|M_1 M|}$$

3 Свойства производной по направлению

1). Скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ равна $\frac{\partial f}{\partial l}(M)$.

2). Поле $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ возрастает тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M) \geq 0$.

3). Поле $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ убывает тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M) \leq 0$.

4). Если $\vec{l} \parallel ox$, то $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$; если $\vec{l} \parallel oy$, то $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Действительно, 1) $\Delta f(M)$ есть изменение функции $f(M)$ на участке MM_1, $\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть средняя скорость изменения функции $f(M)$ на участке MM_1, $\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$;

2) в направлении $\vec{l}$ поле $f(M)$ возрастает $\Leftrightarrow$

$$f(M_1) > f(M) \Leftrightarrow \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial l}(M) \geq 0;$$

3) следующее свойство проверяется так же, как предыдущее свойство;

4) если, например, $\vec{l} \parallel ox$, то $\Delta_l f = \Delta_x f$ и потому $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

4 Формула для вычисления производной по направлению

Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ – дифференцируема в точке $M(x, y, z)$. Тогда

$$\Delta f(M) = f'_x\ (M)\Delta x + f'_y\ (M)\Delta y + f'_z\ (M)\Delta z + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \Delta l$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{o(\Delta l)}{\Delta l} = 0$.

Поделим равенство (8.1) на Δl:

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = f'_x\ (M)\,\frac{\Delta x}{\Delta l} + f'_y\ (M)\,\frac{\Delta y}{\Delta l} + f'_z\ (M)\frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}.$$

Рассмотрим вектор $\operatorname{grad} f(M) = \left\{ f'_x\ (M),\ f'_y\ (M),\ f'_z\ (M) \right\}$, называемый ***градиентом поля*** $f(M)$, и вектор $\vec{l_0} = \left\{ \dfrac{\Delta x}{\Delta l}, \dfrac{\Delta y}{\Delta l}, \dfrac{\Delta z}{\Delta l} \right\}$, равный единичному вектору направления $\vec{l}$. Тогда равенство (8.2) можно записать в виде

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \operatorname{grad} f(M) \cdot \vec{l}_0 + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l},$$

где первое слагаемое есть скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} f(M)$ и $\vec{l_0}$.

В пределе при Δl, стремящемся к нулю, получим:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(M) \cdot \vec{l_0},$$

где $\operatorname{grad} f(M) = \left\{ f'_x\ (M),\ f'_y\ (M),\ f'_z\ (M) \right\}$ – градиент скалярного поля $f(M)$, $\vec{l}_0 = \dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ – единичный вектор направления $\vec{l}$.

5 Градиент поля и его свойства

Вектор $\operatorname{grad} f(M)=\left\{ f'_x\ (M),\ f'_y\ (M),\ f'_z\ (M)\right\}$ является важной характеристикой скалярного поля. Введем условный оператор $\vec{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ (оператор Гамильтона или вектор "набла"). С его помощью удобно записать градиент скалярного поля

$$\operatorname{grad} f=\left\{\frac{\partial}{\partial x}f,\frac{\partial}{\partial y}f,\frac{\partial}{\partial z}f\right\}=\vec{\nabla}f.$$

Отметим ряд свойств градиента.

1). Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего возрастает в направлении вектора $\operatorname{grad} f(M_0)$ со скоростью, равной $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$.

2). Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего убывает в направлении, противоположном вектору $\operatorname{grad} f(M_0)$, со скоростью, равной $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$.

3). Вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0.

4). Дифференциальные свойства:

$$4.1)\ \operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v,\qquad 4.2)\ \operatorname{grad}(u\cdot v)=u\cdot\operatorname{grad}v+v\cdot\operatorname{grad}u,$$

$$4.3)\ \operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\operatorname{grad}u-u\cdot\operatorname{grad}v}{v^2},\quad 4.4)\ \operatorname{grad} f(u)=f'_u\cdot\operatorname{grad}u,\quad 4.5)\ \operatorname{grad}r=\frac{\vec{r}}{r}.$$

Проверим эти свойства.

1. Из формулы и определения скалярного произведения следует, что

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\operatorname{grad} f(M_0)\cdot\vec{l_0}=\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\cdot\left|\vec{l_0}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где ϕ — угол между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\vec{l}$. Так как длина единичного вектора $\vec{l_0}$ равна единице, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\cdot\cos\varphi.$$

Поэтому $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $|\operatorname{grad} f(M_0)|$, когда $\cos\phi = 1$, то есть угол ϕ между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\vec{l}$ равен нулю и $\operatorname{grad} f(M_0) \uparrow\uparrow \vec{l}$.

2. Производная $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ будет принимать наименьшее значение, когда $\cos\phi = -1$, т.е. угол $\phi = \pi$ и $\operatorname{grad} f(M_0) \uparrow\downarrow \vec{l}$.

3. Поверхность уровня поля $f(x, y, z)$ имеет уравнение $f(x, y, z) = c$.

Нормальный вектор этой поверхности $\overrightarrow{N} = \left\{ f'_x, f'_y, f'_z \right\}_{M_0}$ совпадает с $\operatorname{grad} f(M_0)$. Значит, вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проведенной в точке M_0.

4.1.

$$\operatorname{grad}(u+v) = \left\{ (u+v)'_x, (u+v)'_y, (u+v)'_z \right\} = \left\{ u'_x, u'_y, u'_z \right\} + \left\{ v'_x, v'_y, v'_z \right\} = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v;$$

аналогично проверяются свойства 4.2), 4.3), 4.4);

для проверки свойства 4.5) учтем, что $\vec{r} = \{x, y, z\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$r'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{r}$; аналогично, $r'_y = \dfrac{y}{r}, \ r'_z = \dfrac{z}{r}$ и поэтому

$$\operatorname{grad} r = \left\{ r'_x, r'_y, r'_z \right\} = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\} = \frac{1}{r}\{x, y, z\} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Из первого и третьего свойств следует ***инвариантное определение градиента***, т.е. определение, не зависящее от системы координат:

Градиент скалярного поля $f(M)$ в точке M_0 есть вектор, который

а) по величине равен наибольшей скорости возрастания поля $f(M)$ в точке M_0,

б) направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0, в сторону наибольшего возрастания поля.

Пример 1. Найти наибольшую скорость возрастания поля $f(r) = r^3$ в точке $A(1,2,2)$.

Решение. Найдем градиент поля:

$$\operatorname{grad} f(r) = \operatorname{grad} r^3 = 3r^2 \operatorname{grad} r = 3r^2 \frac{\vec{r}}{r} = 3r\vec{r}.$$

Наибольшая скорость возрастания поля в точке A равна

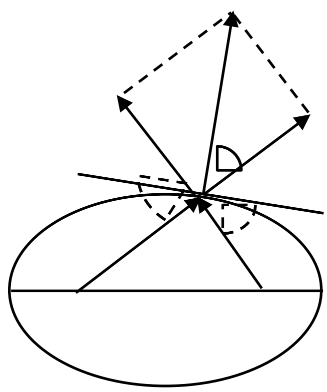
$$\left|\operatorname{grad} f(r)\right|_A = \left|3r\vec{r}\right|_A = 3r^2\Big|_A = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Big|_A = 27.$$

Пример 2. Доказать оптическое свойство эллипса: лучи, выходящие из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой фокус эллипса.

Решение. Пусть $F_1, F_2 -$ фокусы эллипса; $\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1P},\ \vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2P}$. Рассмотрим скалярное поле $f(P) = r_1 + r_2$. По определению эллипса точка P принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда $f(P) = r_1 + r_2 = const$, т.е. эллипс есть линия уровня скалярного поля $f(P)$; поэтому

$$\operatorname{grad}(r_1 + r_2) = \frac{\vec{r_1}}{r_1} + \frac{\vec{r_2}}{r_2}$$

направлен по нормали к эллипсу в точке P. Кроме того, этот вектор направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\vec{r_1}}{r_1}, \frac{\vec{r_2}}{r_2}$. Длины этих векторов равны единице, поэтому параллелограмм является ромбом и его диагональ является биссектрисой угла ромба, т.е. $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$. Тогда $\angle\beta_1 = \angle\beta_2$, как углы дополнительные до прямого. Так как $\angle\gamma_1 = \angle\beta_1,\ \ \angle\gamma_2 = \angle\beta_2,$ то $\angle\gamma_1 = \angle\gamma_2,$ т.е. луч, выходящий из фокуса F_1 эллипса, после отражения от эллипса пройдет через другой фокус F_2.



F_1

F_2

P

$\operatorname{grad}\left(r_1 + r_2\right)$

$\vec{r}_1$

$\vec{r}_2$

$\dfrac{\vec{r}_1}{r_1}$

α_1

$\dfrac{\vec{r}_2}{r_2}$

α_2

β_1

β_2

γ_1

γ_2

Рис. 2

6 Векторное поле и векторные линии

Векторное поле – это область пространства, в каждой точке M которой задан вектор $\vec{a}(M)$.

Пример 1. Пусть на материальную точку в области D действует сила $\vec{F}(M)$. Тогда в области D определено векторное поле $\vec{F}(M)$.

Пример 2. Пусть в области D происходит течение жидкости и в каждой точке M задан вектор $\vec{v}(M)$ скорости частицы жидкости. Тогда в области D определено векторное поле скоростей жидкости.

Пример 3. Поместим заряд $+q$ в начало координат. Тогда сила, с которой этот заряд действует на единичный положительный заряд, помещенный в точку M, определяется по закону Кулона:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ — вектор, идущий из начала координат в точку M (радиус-вектор точки M), r — его длина. Имеем векторное поле напряженностей $\vec{E}(M)$, создаваемое зарядом q.

Мы будем рассматривать только стационарные поля, для которых вектор поля $\vec{a}(M)$ зависит от точки M и не зависит от времени. Проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат обозначим $P(M),\ Q(M),\ R(M)$. Тогда:

$$\vec{a}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}.$$

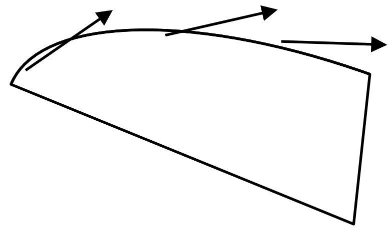
Далее всюду предполагаем, что функции $P,\ Q,\ R$ непрерывны вместе со своими частными производными; в противном случае точку поля назовем особой.

Одной из характеристик векторного поля являются ***векторные линии***.

Векторной линией векторного поля называют линию, в каждой точке которой касательный вектор коллинеарен вектору поля (рис. 3).

Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл.

В поле скоростей текущей жидкости векторные линии – это линии тока этой жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости.



M

$\vec{a}(M)$

Рис. 3

В электрическом поле векторные линии – это силовые линии и их расположение очень важно в физике.

Выведем уравнения векторных линий для поля $\vec{a}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ (для краткости аргументы функций P, Q, R не выписаны).

Пусть уравнения векторной линии $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$, ($t-$ параметр).

Касательным вектором этой линии является вектор $\vec{r}\,'(t)=\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ и вектор $\vec{r}\,'(t)dt=\{x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt\}=\{dx, dy, dz\}$.

По определению векторной линии ее касательный вектор $\vec{r}\,'(t)dt$ и вектор поля $\vec{a}=\{P, Q, R\}$ коллинеарны. Поэтому координаты этих векторов пропорциональны, т. е.

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

Пример 4. Магнитное поле $\vec{H}(M)$ создано электрическим током силы J, текущим по бесконечно длинному прямому проводу l. Найти силовые линии этого поля.

Решение. Если провод l принять за ось Oz некоторой декартовой системы координат, то, как известно из физики,

$$\vec{H}(M)=2J\,\frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}.$$

Запишем уравнения векторных линий для поля $\vec{H}(M)$:

$$\frac{dx}{-2J\,\dfrac{y}{x^2+y^2}}=\frac{dy}{2J\,\dfrac{x}{x^2+y^2}}=\frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x},\ dz=0.$$

Из первого уравнения имеем $xdx=-ydy,\ \int xdx=-\int ydy,\ x^2=-y^2+C$. Из второго уравнения $z=h$. Таким образом, силовые линии поля $\vec{H}(M)$ есть окружности $x^2+y^2=C$, расположенные в плоскостях $z=h$, параллельных плоскости XOY.

Пример 5. Найти векторные линии поля $\vec{a}=z\vec{i}+(z-x)^2\vec{j}+x\vec{k}$.

Решение. Учитывая, что $P=z,\ Q=(z-x)^2,\ R=x$, запишем систему:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{(z-x)^2}=\frac{dz}{x}.$$

В одном из уравнений этой системы $\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}$ разделим переменные: $xdx=zdz$.

Теперь проинтегрируем $\int xdx=\int zdz$ и получим

$$\frac{x^2}{2}=\frac{z^2}{2}+\frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad x^2-z^2=C_1.$$

Чтобы решить другое уравнение системы, воспользуемся известным свойством пропорций: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\lambda\cdot a+\mu\cdot c}{\lambda\cdot b+\mu\cdot d}$. В нашем примере удобно взять $\lambda = 1$, $\mu = -1$ и записать систему уравнений следующим образом:

$$\frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dx}{z} = \frac{dz}{x} = \frac{dx-dz}{z-x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{-d(z-x)}{(z-x)}.$$

Разделим переменные: $dy = -(z-x)\,d(z-x)$. Проинтегрируем $\int dy = -\int (z-x)d(z-x)$ и получим $y = -\dfrac{(z-x)^2}{2} + C_2$. Таким образом, векторные линии данного поля есть линии пересечения поверхностей $x^2 - z^2 = C_1$ и $y = -\dfrac{(z-x)^2}{2} + C_2$.

Поток векторного поля

Пусть в некоторой части пространства течет жидкость, причем скорость частицы жидкости зависит только от точки, через которую протекает жидкость, и не зависит от времени, т. е. $\vec{v}=\vec{v}(M)$. Требуется вычислить количество (объем) жидкости Π_σ, протекающее в единицу времени через ориентированную поверхность (σ) в выбранном направлении (предполагается, что жидкость может свободно протекать через эту поверхность).

Рассмотрим сначала простейший случай. Пусть (σ) — плоская площадка с нормальным вектором $\vec{n}$, а скорость течения жидкости $\vec{v}$ во всех точках одна и та же. Тогда количество жидкости, протекающей через эту площадку в единицу времени, равно (рис. 1) объему цилиндра с основанием σ и образующей $|\vec{v}|$. Так как высота этого цилиндра равна $\left|\text{пр}_{\vec{n}}\,\vec{v}\right|=\left|\frac{(\vec{v},\vec{n})}{|\vec{n}|}\right|=\left|(\vec{v},\vec{n})\right|$, то его объем равен $\left|(\vec{v},\vec{n})\right|\cdot\sigma$. Эта величина и равна количеству жидкости, протекающей через (σ). Опустив знак абсолютной величины, мы получим величину $(\vec{v},\vec{n})\cdot\sigma$, которую называют потоком жидкости через (σ). Если угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$ — острый, то говорят, что жидкость течет в направлении вектора $\vec{n}$; в этом случае $(\vec{v},\vec{n})>0$ и поток совпадает с количеством жидкости. Если угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$ тупой, то говорят, что жидкость течет в направлении, противоположном вектору $\vec{n}$; в этом случае $(\vec{v},\vec{n})<0$ и поток отличается от количества жидкости знаком. Если векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, то жидкость течет вдоль площадки (σ) и поток равен нулю.

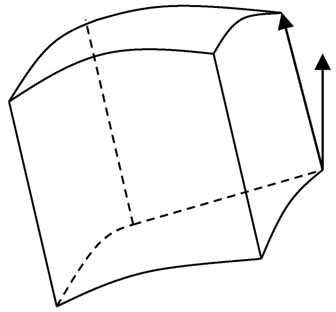


Рис. 1

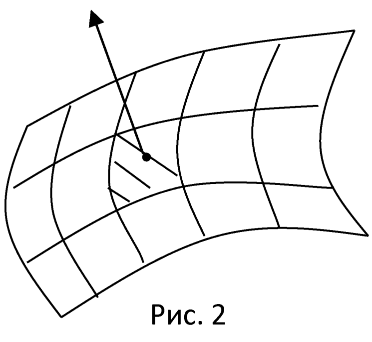


Рис. 2

Перейдем теперь к общему случаю. Для вычисления потока жидкости через произвольную поверхность (σ) разобьем эту поверхность на n частей $(\Delta\sigma_1),\dots,(\Delta\sigma_n)$ с площадями $\Delta\sigma_1,\dots,\Delta\sigma_n$ (рис. 2). На каждой площадке $(\Delta\sigma_k)$ выберем произвольную точку M_k. Будем приближенно считать, что все частицы, протекающие через малую площадку $(\Delta\sigma_k)$, имеют одинаковые скорости $\vec{v} \approx \vec{v}(M_k)$; кроме того, площадку будем считать плоской и перпендикулярной нормальному вектору $\vec{n}(M_k)$.

Тогда поток жидкости через площадку $(\Delta\sigma_k)$ приближенно равен

$$\Pi_{\Delta\sigma_k} \approx \left(\vec{v}(M_k), \vec{n}(M_k)\right) \cdot \Delta\sigma_k.$$

Для потока через всю поверхность получим

$$\Pi_\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Pi_{\Delta\sigma_k} \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{v}(M_k), \vec{n}(M_k)\right) \cdot \Delta\sigma_k.$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше $d = \max\{\Delta\sigma_1, ..., \Delta\sigma_n\}$. Точное значение потока определяется как предел этой суммы при $d \to 0$:

$$\Pi_\sigma = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{v}(M_k), \vec{n}(M_k)\right) \cdot \Delta\sigma_k.$$

Полученный предел равен поверхностному интегралу I рода от скалярной функции $\left(\vec{v}(M), \vec{n}(M)\right)$. Таким образом, поток жидкости через поверхность (σ) вычисляется по формуле

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{v}, \vec{n})\, d\sigma.$$

Отметим, что

1) если суммарный поток $\Pi_\sigma > 0$, то количество жидкости, протекающей в направлении нормали $\vec{n}$, больше количества жидкости, протекающей в направлении $-\vec{n}$;

2) если суммарный поток $\Pi_\sigma < 0$, то количество жидкости, протекающей в направлении нормали $\vec{n}$, меньше количества жидкости, протекающей в направлении $-\vec{n}$;

3) если $\Pi_\sigma = 0$, то количества жидкости, протекающей в том и другом направлении, одинаковы.

Интеграл в формуле (10.1) является поверхностным интегралом первого рода от скалярной функции $(\vec{v}, \vec{n})$. Его также называют поверхностным интегралом второго рода от вектор-функции $\vec{v}$. Аналогичным образом определяют поток и для произвольного векторного поля $\vec{a}$.

2. Понятие потока и формы его записи

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность (σ) с единичным нормальным вектором $\vec{n}$ называют величину

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma .$$

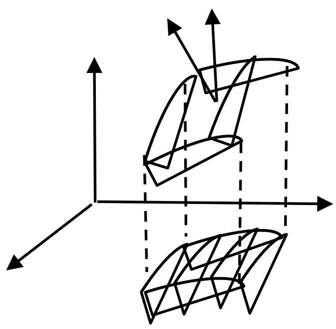
Отметим, что при изменении ориентации поверхности вектор $\vec{n}$ заменяется на вектор $(-\vec{n})$ и, следовательно, поток меняет знак.

Рассмотрим различные формы записи потока.

1). Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\vec{n}$ и соответственно осями ox, oy, oz. Тогда направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ являются координатами вектора $\vec{n}$, т.е. $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Если вектор поля $\vec{a}$ имеет координаты $P, Q, R,$ то

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma .$$

2). Рассмотрим элемент площади $(d\sigma)$ и его проекцию $(d\sigma_{xy})$ на плоскость xoy (рис. 3). Угол между $(d\sigma)$ и плоскостью xoy равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}$ и $\vec{k}$, т.е. углу γ. Поэтому



$(d\sigma)$

Рис. 3

x

z

y

$\vec{n}$

o

$\vec{k}$

$(d\sigma_{xy})$

$\cos\gamma\, d\sigma = \text{пр}_{xoy}\, d\sigma = d\sigma_{xy}$.

Аналогично

$\cos\beta\, d\sigma = \text{пр}_{xoz}\, d\sigma = d\sigma_{xz}$, $\cos\alpha\, d\sigma = \text{пр}_{yoz}\, d\sigma = d\sigma_{yz}$.

Тогда

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy}.$$

3). Введем вектор $\overrightarrow{d\sigma} = \left\{d\sigma_{yz},\ d\sigma_{xz},\ d\sigma_{xy}\right\}$, называемый векторным элементом площади. Так как $\vec{a} = \{P,\ Q,\ R\}$, то из (10.4) следует

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\,\overrightarrow{d\sigma}.$$

Наиболее употребительны из получившихся следующие формы записи потока

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\,\overrightarrow{d\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy}.$$

Первые две формы записи потока в соотношении называют векторными, последнюю форму записи ─ координатной.

13.3. Вычисление потока

Рассмотрим несколько способов вычисления потока.

1). Вычисление потока по формуле $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$.

При использовании этой формулы надо вычислить $\vec{a}\cdot\vec{n}$ и $d\sigma$; например, $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$ для поверхности с уравнением $z = z(x,y)$.

Пример 1. Заряд q помещен в начало координат и создает поле напряженностей $\vec{E} = \dfrac{q}{r^3}\,\vec{r}$. Вычислить поток этого поля через поверхность сферы радиусом R с центром в начале координат и нормальным вектором, направленным от начала координат.

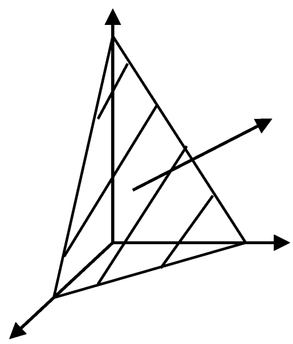
Решение. Так как единичный вектор нормали $\vec{n}$ к сфере коллинеарен радиус-вектору $\vec{r}$, то $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r}$. Тогда $\left(\vec{E},\vec{n}\right) = \dfrac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{q}{r^4}r^2 = \dfrac{q}{r^2}$. На поверхности сферы $r = R$, $\left(\vec{E},\vec{n}\right) = \dfrac{q}{R^2}$; площадь поверхности сферы $\sigma = 4\pi R^2$. Поэтому

$$\Pi = \int\limits_{(\sigma)} \left(\vec{E},\vec{n}\right)d\sigma = \frac{q}{R^2}\int\limits_{(\sigma)} d\sigma = \frac{q}{R^2}\,\sigma = \frac{q}{R^2}\,4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Заметим, что величина потока не зависит от радиуса сферы.

Пример 2. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x,\, z,\, y\}$ через верхнюю сторону части плоскости $3x + 2y + z = 6$, расположенной в первом октанте (рис. 4).

Решение. Вычислим поток по формуле $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})d\sigma$.



y

x

2

3

$\vec{n}$

z

6

Рис.4

o

Нормальный вектор плоскости $3x + 2y + z = 6$ есть вектор $\vec{N} = \{3, 2, 1\}$;
единичный нормальный вектор $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \dfrac{\{3, 2, 1\}}{\sqrt{14}}$. Его третья координата положительна, следовательно, он составляет с осью Oz острый угол и определяет верхнюю сторону поверхности. Вычислим скалярное произведение $\left(\vec{a},\vec{n}\right)$ на плоскости $z = 6 - 3x - 2y$:

$$(\vec{a},\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{14}}(6x+2z+y), \quad (\vec{a},\vec{n})\Big|_{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{14}}\big(6x+2(6-3x-2y)+y\big) = \frac{3}{\sqrt{14}}(4-y)$$

.

Теперь вычислим элемент $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{14}\,dx\,dy$. Тогда получим

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{3}{\sqrt{14}}(4-y)\sqrt{14}\,dx\,dy = 3\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(4-y)\,dx\,dy$$

.

Проекция (σ_{xy}) поверхности (σ) на плоскость XOY есть треугольник в плоскости XOY, ограниченный линиями $3x+2y=6,\ x=0,\ y=0$. Поэтому

$$\Pi_\sigma = 3\int\limits_0^3 (4-y)\,dy \int\limits_0^{\frac{6-2y}{3}} dx = 3\int\limits_0^3 (4-y)\frac{6-2y}{3}\,dy = 2\int\limits_0^3 (4-y)\cdot(3-y)\,dy = 27.$$

2). Вычисление потока методом проектирования на три плоскости

Воспользуемся формулой $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy}$ и рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz},\ \ I_2 = \int\limits_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz},\ \ I_3 = \int\limits_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy}$$

.

Для вычисления интеграла $I_1 = \int\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)\,d\sigma_{yz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить x его значением $x = x(y,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{yz} = \text{пр}_{yoz}\,d\sigma$ и поэтому
$$d\sigma_{yz} = \begin{cases} +dy\,dz, & (\vec{n},ox) < \pi/2, \\ -dy\,dz, & (\vec{n},ox) > \pi/2, \\ 0, & (\vec{n},ox) = \pi/2, \end{cases}$$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{yz}).

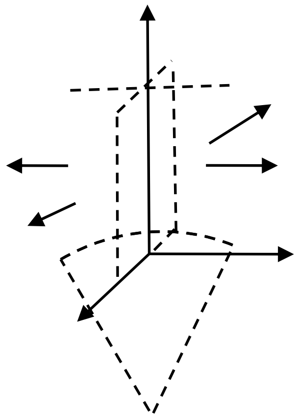
Для вычисления интеграла $I_2 = \int\limits_{(\sigma)} Q(x,y,z)\,d\sigma_{xz}$ следует а) в подынтегральной функции заменить y его значением $y=y(x,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{xz}=\text{пр}_{xoz}\ d\sigma$ и поэтому

$$d\sigma_{xz}=\begin{cases}+dx\,dz, & (\vec{n},oy)<\pi/2,\\ -dx\,dz, & (\vec{n},oy)>\pi/2,\\ 0, & (\vec{n},oy)=\pi/2,\end{cases}$$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{xz}).

Аналогично вычисляется интеграл I_3.



x

y

z

0

$\vec{n}$

$\vec{n}$

Рис. 5

$\vec{n}$

Пример 10.3. Вычислить поток поля $\vec{a}=\{\,y^5,\ y,\ z^4-x^4\}$ через поверхность цилиндра $x^2+y^2=9\quad(0\le z\le 5)$ с выбранной внешней нормалью (рис. 5).

Решение. Для вычисления потока воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}P\,d\sigma_{yz}+Q\,d\sigma_{xz}+R\,d\sigma_{xy}=\int\limits_{(\sigma)}y^5\,d\sigma_{yz}+y\,d\sigma_{xz}+\left(z^4-x^4\right)d\sigma_{xy}.$$

1). Вычислим интеграл $I_1=\int\limits_{(\sigma)}y^5\,d\sigma_{yz}$.

На части (σ_1) цилиндра, где $x=+\sqrt{9-y^2}$, имеем: $(\vec{n},ox)<\pi/2$, $d\sigma_{yz}=+dy\,dz$;

на части (σ_2) цилиндра, где $x=-\sqrt{9-y^2}$, имеем: $(\vec{n},ox)>\pi/2$, $d\sigma_{yz}=-dy\,dz$;

$$I_1=\int\limits_{(\sigma_1)} y^5\,d\sigma_{yz}+\int\limits_{(\sigma_2)} y^5\,d\sigma_{yz}=+\iint\limits_{(\sigma_{yz})} y^5dy\,dz-\iint\limits_{(\sigma_{yz})} y^5dy\,dz=0.$$

2). Вычислим интеграл $I_2=\int\limits_{(\sigma)} y\,d\sigma_{xz}$.

На части (σ_3) цилиндра, где $y=+\sqrt{9-x^2}$, имеем: $(\vec{n},oy)<\pi/2$, $d\sigma_{xz}=+dx\,dz$;

на части (σ_4) цилиндра, где $y=-\sqrt{9-x^2}$, имеем: $(\vec{n},oy)>\pi/2$, $d\sigma_{xz}=-dx\,dz$;

$$I_2=\int\limits_{(\sigma_3)} y\,d\sigma_{xz}+\int\limits_{(\sigma_4)} y\,d\sigma_{xz}=+\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\sqrt{9-x^2}\,dx\,dz+\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\left(-\sqrt{9-x^2}\right)(-dx\,dz)=2\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

Проекция (σ_{xz}) есть прямоугольник, поэтому

$$I_2=2\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\sqrt{9-x^2}\,dx\,dz=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx\int\limits_{0}^{5}dz=10\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Воспользовавшись результатом примера 7.8, получим

$$I_2=10\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=10\cdot\frac{S}{2}=5\pi R^2=45\pi.$$

3). Вычислим интеграл $I_3=\int\limits_{(\sigma)}\left(z^4-x^4\right)d\sigma_{xy}$.

Так как на поверхности цилиндра $(\vec{n},oz)=\pi/2$, то $d\sigma_{xy}=0$ и поэтому $I_3=0$.

В результате $\Pi_\sigma=I_1+I_2+I_3=45\pi.$

3). Вычисление потока методом проектирования на одну плоскость

Для вычисления потока воспользуемся формулой $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$ и параметрическим уравнением поверхности (σ): $\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in(S)$.

Вычислим нормальный вектор поверхности по формуле: $\vec{N}=\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'$; тогда единичный нормальный вектор $\vec{n}$, определяющий ориентацию поверхности, есть вектор

$\vec{n} = +\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, если $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{N}$, $\quad \vec{n} = -\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, если $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{N}$.

Элемент площади $d\sigma$ вычислим по формуле (13.1):

$$d\sigma = \left| \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right| du\,dv = \left|\vec{N}\right| du\,dv.$$

Подставляя значения для $\vec{n}$ и $d\sigma$ в интеграл $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma$, получим

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \cdot \left|\vec{N}\right| du\,dv = \pm \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \vec{N}\, du\,dv = \pm \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right) du\,dv.$$

Окончательно имеем:

$$\Pi_\sigma = + \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right) du\,dv, \text{ если } \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \uparrow\uparrow \vec{n};$$

$$\Pi_\sigma = - \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right) du\,dv, \text{ если } \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \uparrow\downarrow \vec{n}.$$

Пример 4. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{x,\ y,\ z\}$ через поверхность $y = x^2 + z^2$ $(y \le 4)$, ориентированную внешней нормалью (рис. 6).

Решение. Запишем уравнение поверхности в параметрическом виде

$x = \rho \cdot \cos\varphi,\ z = \rho \cdot \sin\varphi,\ y = \rho^2$ $(\rho, \varphi -$ параметры).

Найдем вектор

$$\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & 2\rho & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 2\rho^2\cos\varphi \cdot \vec{i} - \rho \cdot \vec{j} + 2\rho^2 \sin\varphi \cdot \vec{k}.$$

Вторая координата этого вектора отрицательна, как и у вектора $\vec{n}$, поэтому

$\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}' \uparrow\uparrow \vec{n}$ и $\Pi_\sigma = +\iint\limits_{(S)} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) d\rho\, d\varphi$;

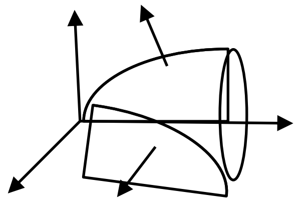


Рис. 6

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) = \left\{\rho\cdot\cos\varphi,\ \rho^2,\ \rho\cdot\sin\varphi\right\}\cdot\left\{2\rho^2\cos\varphi,\ -\rho,\ 2\rho^2\sin\varphi\right\} = \rho^3.$$

Тогда $$\Pi_\sigma = +\iint\limits_{(S)} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{(S)} \rho^3\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi.$$

Пример 5. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x,\ z,\ y\}$ через верхнюю сторону части плоскости $3x + 2y + z = 6$, расположенной в первом октанте (рис. 3).

Решение. Вычислим поток методом проектирования на одну плоскость. Для этого запишем уравнение поверхности в параметрическом виде $x = x,\ y = y,\ z = 6 - 3x - 2y$ $(x,\ y -$ параметры).

Найдем векторное произведение

$$\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}.$$

Вторая координата этого вектора положительна, как и у вектора $\vec{n}$, поэтому

$\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}' \uparrow\uparrow \vec{n}$ и $\Pi_\sigma = +\iint\limits_{(\sigma_{xy})} \vec{a}\cdot\left(\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}'\right) dx\, dy$.

Вычислим значение подынтегральной функции на поверхности (σ):

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}'\right) = \{2x,\ z,\ y\}\cdot\{3,\ 2,\ 1\} = \left(6x + 2z + y\right)\Big|_{(\sigma)} = 6x + 2\left(6 - 3x - 2y\right) + y = 3\left(4 - y\right).$$

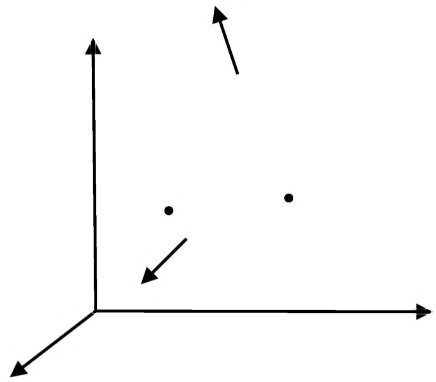
Тогда $\Pi_\sigma = + \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}' \right) dx\, dy = 3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} (4 - y)\, dx\, dy$. Этот интеграл был вычислен в примере 2: $\Pi_\sigma = 3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} (4 - y)\, dx\, dy = 27$.

Лекция 18. Формула Остроградского. дивергенция поля

Поток векторного поля через замкнутую поверхность (σ) удобно вычислять по формуле Остроградского с помощью дивергенции $\operatorname{div}\vec{a}$ поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$:

$$\Pi_\sigma = \oint\!\!\oint_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV,$$ где $$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В этой формуле (V) — тело, ограниченное замкнутой поверхностью (σ);поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью; функции P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными.



(σ_2)

(σ_1)

Рис. 1

x

z

y

$\vec{n}$

$\vec{n}$

о

Вывод формулы проведем для случая, когда поверхность (σ) состоит (рис. 1) из поверхности (σ_1) с уравнением $z = z_1(x, y)$ и поверхности (σ_2) с уравнением $z = z_2(x, y)$.

Запишем формулу Остроградского в координатной форме

$$\Pi_\sigma = \oiint_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

Покажем сначала, что $\oiint_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy} = \int_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$. Действительно,

$$\int_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_{(V_{xy})} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{(\sigma_{xy})} \Big(R\big(x, y, z_2(x, y)\big) - R\big(x, y, z_1(x, y)\big) \Big) dx\,dy.$$

С другой стороны, $\oiint_{(\sigma)} R(x, y, z)\,d\sigma_{xy} = \int_{(\sigma_1)} R(x, y, z)\,d\sigma_{xy} + \int_{(\sigma_2)} R(x, y, z)\,d\sigma_{xy}$.

На поверхности (σ_2): $z = z_2(x, y)$; $d\sigma_{xy} = +dx\,dy$, так как $\left(\widehat{\vec{n}, oz}\right) < \pi/2$;

на поверхности (σ_1): $z = z_1(x, y)$; $d\sigma_{xy} = -dx\,dy$, так как $\left(\widehat{\vec{n}, oz}\right) > \pi/2$;

поэтому

$$\oiint_{(\sigma)} R(x, y, z)\,d\sigma_{xy} = \iint_{(\sigma_{xy})} R\big(x, y, z_2(x, y)\big) dx\,dy - \iint_{(\sigma_{xy})} R\big(x, y, z_1(x, y)\big) dx\,dy.$$

Получившееся выражение равно правой части формулы, значит

$$\oiint_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy} = \int_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV.$$

Аналогично можно показать, что

$$\oiint_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz} = \int_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV, \qquad \oiint_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} = \int_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dV.$$

Складывая равенства, получим формулу Остроградского.

Пример 1. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x, z, y\}$ через поверхность пирамиды, ограниченную плоскостью $3x + 2y + z = 6$ и координатными плоскостями.

Решение. Так как поверхность замкнутая, то воспользуемся формулой Остроградского

$$\Pi_{\sigma}=\int\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV=\int\limits_{(V)}\left(2+0+0\right)dV=2\cdot V_{\text{пир}}=2\cdot\left(\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right)\cdot 6=12$$

.

***Пример 2*.** Вычислить поток жидкости, текущей со скоростью $\vec{v}=\left\{x+y,\,z-x,\,z\right\}$, через боковую поверхность конуса $x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le 4)$ в направлении внешней нормали (рис. 2).

Решение. Поток через боковую поверхность конуса удобно вычислить как разность потока через полную поверхность и потока через основание. Поток через полную поверхность вычислим по формуле Остроградского

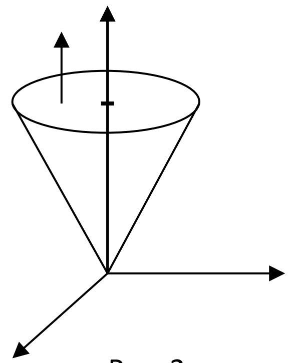


Рис. 2

о

$$\Pi_{\text{полн}}=\int\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{v}\,dV=\int\limits_{(V)}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y)+\frac{\partial}{\partial y}(z-x)+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right)dV=$$

$$=2\int\limits_{(V)}dV=2V_{\text{кон}}=2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{2\pi}{3}\cdot 4^2\cdot 4=\frac{128\pi}{3}.$$

Поток жидкости через основание конуса вычислим по формуле

$$\Pi_{\text{осн}}=\int\limits_{(\sigma)}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Учтем, что единичный вектор нормали к основанию конуса равен $\vec{n}=\left\{0,0,1\right\}$. Поэтому $\vec{v}\cdot\vec{n}=(x+y)\cdot 0+(z-x)\cdot 0+z\cdot 1=z$. На основании конуса $z=4$, значит, $\vec{v}\cdot\vec{n}=4$ и

$$\Pi_{\text{осн}}=\int\limits_{(\sigma)}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma=4\int\limits_{(\sigma)}d\sigma=4\sigma.$$

Здесь σ — площадь основания, т. е. площадь круга радиусом 4. Следовательно,

$$\Pi_{\text{осн}}=4\pi R^2=64\pi,\qquad \Pi_{\text{бок}}=\Pi_{\text{полн}}-\Pi_{\text{осн}}=\frac{128}{3}\pi-64\pi=-\frac{64}{3}\pi.$$

Так как $\Pi_{\text{бок}}<0$, то через боковую поверхность конуса в направлении внешней нормали течет жидкости меньше, чем в противоположном направлении.

Остановимся более подробно на свойствах дивергенции.

1 Инвариантное определение дивергенции

Рассмотрим точку M (рис. 3), окружим ее замкнутой поверхностью (σ) и вычислим поток поля $\vec{a}$ через эту поверхность по формуле Остроградского

$$\Pi_\sigma = \oiint\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{a}\, dV.$$

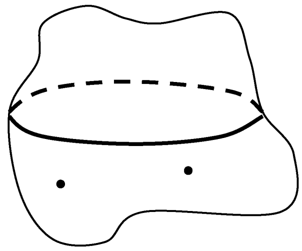


Рис. 3

Применяя к тройному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Pi_\sigma = (\operatorname{div} \vec{a})_M \cdot V \quad \text{или} \quad (\operatorname{div} \vec{a})_M = \frac{\Pi_\sigma}{V}.$$

Здесь $\tilde{M}$ есть некоторая точка из области (V). В последнем равенстве перейдем к пределу, стягивая область (V) в точку M (при этом точка M будет стремиться к точке M). Запишем результат предельного перехода:

$$(\operatorname{div} \vec{a})_M = \lim_{(V) \to M} \frac{\Pi_\sigma}{V}.$$

Мы получили ***инвариантное*** (т.е. независящее от системы координат) определение дивергенции. Первоначальное определение дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

было введено для прямоугольной системы координат.

2 Физический смысл дивергенции

Пусть векторное поле $\vec{a}$ есть поле скоростей жидкости. Величина потока Π_σ равна разности между количеством жидкости, вытекающей из области (V), и количеством жидкости, втекающей в эту область. Если $\Pi > 0$, то из области (V) жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области (V) имеются <u>источники</u>, питающие поток жидкости. Величина $\frac{\Pi_\sigma}{V}$ определяет количество жидкости, возникающей в единицу времени в единице объема. Ее называют средней мощностью источников в области (V). Величину

$$\lim_{(v)\to M}\frac{\Pi_\sigma}{V}=\operatorname{div}\vec{a}(M)$$

называют мощностью источника в точке M.

Если $\Pi<0$, то в область (V) втекает жидкости больше, чем вытекает, т. е. в области (V) имеются <u>стоки</u> со средней мощностью $\left|\frac{\Pi_\sigma}{V}\right|$. Величина

$$\left|\lim_{(V)\to M}\frac{\Pi_\sigma}{V}\right|=\left|\operatorname{div}\vec{a}(M)\right|$$

есть мощность стока в точке M. Итак,

1) если $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$, то в точке M имеется ***источник мощности*** $\operatorname{div}\vec{a}(M)$,

2) если $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$, то в точке M имеется ***сток мощности*** $\left|\operatorname{div}\vec{a}(M)\right|$,

3) если $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$, то в точке M отсутствуют и источник, и сток.

3 Дифференциальные свойства дивергенции

1) $\operatorname{div}\vec{c}=0$, или $\vec{\nabla}\cdot\vec{c}=0$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

2) $\operatorname{div}\vec{r}=3$, или $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор),

3) $\operatorname{div}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}+\vec{\nabla}\cdot\vec{b}$,

4) $\operatorname{div}\left(f\ \vec{a}\right)=f\ \operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}f$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(f\ \vec{a}\right)=f\ \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)$,

(f – скалярное поле, $\vec{a}$ – векторное поле),

5) $\operatorname{div}\left(c\ \vec{a}\right)=c\ \operatorname{div}\vec{a}$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(c\ \vec{a}\right)=c\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)$ (c – константа),

6) $\operatorname{div}\left(f\cdot\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}f$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(f\cdot\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\vec{\nabla}f$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор).

Проверим эти свойства:

1) $\operatorname{div}\vec{c}=\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c_3\right)=0,$

2) $\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$

4) $\operatorname{div}(f\ \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(f\,P) + \frac{\partial}{\partial y}(f\,Q) + \frac{\partial}{\partial z}(f\,R) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q + \frac{\partial f}{\partial z}R\right] + \Big[\ f\,\frac{\partial P}{\partial x} + f\,\frac{\partial Q}{\partial y} + f$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}\cdot\{P, Q, R\} + f\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{a} + f\operatorname{div}\vec{a}\ ,$$

свойство 3) проверяется так же, как свойство 4),

свойство 5) есть следствие свойства 4) при $f = c$,

свойство 6) есть следствие свойства 4) при $\vec{a} = \vec{c}$.

Пример 1. Доказать, что $\operatorname{div}(f(r)\,\vec{r}) = 3f(r) + r\,f'(r)$.

Решение. По свойству 4) дивергенции $\operatorname{div}(f(r)\,\vec{r}) = f(r)\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad} f(r)$;

по свойствам градиента $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$. Тогда

$$\operatorname{div}(f(r)\,\vec{r}) = 3f(r) + \vec{r}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = 3f(r) + r\,f'(r).$$

Пример 2. Доказать, что дивергенция поля напряженностей, создаваемого зарядом q, равна нулю.

Решение. Поле напряженностей, создаваемое зарядом, есть поле $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\,\vec{r}$. Из предыдущего примера при $f(r) = \frac{q}{r^3}$ следует, что

$$\operatorname{div}\left(\frac{q}{r^3}\,\vec{r}\right) = 3\,\frac{q}{r^3} + r\left(\frac{q}{r^3}\right)'_r = 3\,\frac{q}{r^3} + r\left(\frac{-3q}{r^4}\right) = 0.$$

4 Линейный интеграл и циркуляция векторного поля

Задача о работе силы

Пусть задано поле сил $\vec{F}(M)$, под действием которых материальная точка движется по кривой BC от точки B к точке C. Вычислим совершаемую при этом работу. Для этого разобьем линию BC на n частей точками

$B = M_0, M_1, ..., M_{n-1}, M_n = C$ с радиус-векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n$ (рис. 66). Рассмотрим вектор перемещения

$$\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k = \Delta \vec{r}_k$$

и вектор силы $\vec{F}(M_k) = \vec{F}_k$. Их скалярное произведение приближенно равно работе A_k силы $\vec{F}(M)$ вдоль дуги $M_k M_{k+1}$, т. е.

$$A_k \approx \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k.$$

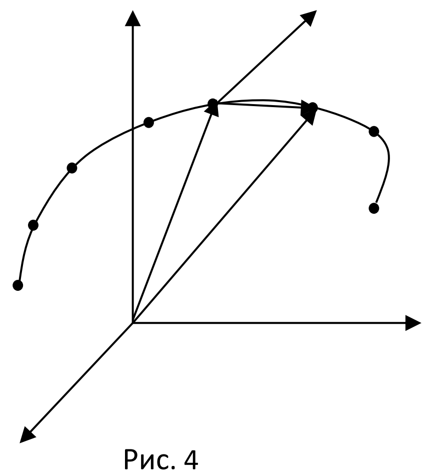


Рис. 4

Вычислим работу вдоль всей линии BC:

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k.$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше длины векторов $\Delta \vec{r}_k$. Максимальную из этих длин обозначим d и, переходя к пределу при $d \to 0$, определим точное значение работы

$$A = \lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k.$$

Этот предел обозначают $\int\limits_{\cup BC} \vec{F}\, d\vec{r}$ и называют линейным интегралом поля $\vec{F}$ по дуге BC или криволинейным интегралом второго рода.

5. Понятие линейного интеграла и его свойства

Отвлекаясь от физического содержания рассмотренной задачи, аналогичным образом вводят понятие линейного интеграла произвольного поля $\vec{a}(M)$ (рис. 4):

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}(M)\, d\vec{r} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{a}(M_k) \cdot \Delta \vec{r}_k,$$

где $M_0, M_1, ..., M_n$ — точки разбиения дуги BC,

$$\Delta \vec{r}_k = \overrightarrow{M_k M_{k+1}}, \; d = \max\left\{ \left|\Delta \vec{r}_1\right|, ..., \left|\Delta \vec{r}_{n-1}\right| \right\}.$$

Отметим три свойства линейного интеграла:

1) $\int\limits_{\cup BC}\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)d\vec{r}=\lambda\int\limits_{\cup BC}\vec{a}\,d\vec{r}+\mu\int\limits_{\cup BC}\vec{b}\,d\vec{r}$ (свойство линейности),

2) $\int\limits_{\cup BC}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{\cup BK}\vec{a}\,d\vec{r}+\int\limits_{\cup KC}\vec{a}\,d\vec{r}$ (свойство аддитивности),

3) $\int\limits_{\cup BC}\vec{a}\,d\vec{r}=-\int\limits_{\cup CB}\vec{a}\,d\vec{r}$,

т. е. при изменении направления обхода кривой линейный интеграл меняет знак, т. к. векторы $\Delta\vec{r}_k$ меняют свое направление на противоположное.

Выразив скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ и $d\vec{r}=\{dx,dy,dz\}$ через их координаты, получим

$$\int\limits_{\cup BC}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{\cup BC}P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ в скобки не заключают, хотя знак интеграла относится ко всему этому выражению. В формуле функции $\vec{a},P,Q,R$ есть функции точки M или ее координат x,y,z. Интеграл $\int\limits_{\cup BC}\vec{a}\,d\vec{r}$ называют ***векторной формой***, а интеграл $\int\limits_{\cup BC}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ – ***координатной формой*** записи линейного интеграла.

В тех случаях, когда линейный интеграл поля $\vec{a}$ берется ***по замкнутой кривой*** L, он называется ***циркуляцией*** поля $\vec{a}$ по кривой L и обозначается так:

$$C\left(\vec{a},L\right)=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}.$$

Приняты и другие обозначения циркуляции: $C\left(\vec{a}\right),\ C.$

18. Лекционное занятие. **Вычисление линейного интеграла.**

Правило вычисления линейных интегралов $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ в следующих двух случаях.

1). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по линии BC, заданной уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, следует:

а) записать интеграл в координатной форме

$$\int\limits_{\cup BC} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,$$

б) заменить x, y, z в функциях P, Q, R соответственно на $x(t), y(t), z(t)$,

в) заменить dx, dy, dz соответственно на $x'(t)\,dt,\ y'(t)\,dt,\ z'(t)\,dt$,

г) найти интервал изменения параметра t и вычислить получившийся определенный интеграл по этому интервалу.

2). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по плоской линии BC с уравнением $y = y(x),\ x \in [b,c]$ следует:

а) записать интеграл в координатной форме $\int\limits_{\cup BC} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$,

б) заменить y в функциях P, Q на $y(x)$,

в) заменить dy на $y'(x)\,dx$,

г) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[b,c]$.

3). В случае центрального поля $\vec{a} = f(r)\,\vec{r}$ следует учесть, что $\vec{r}^{\,2} = r^2$; дифференцируя это равенство, получим $2\vec{r}\,d\vec{r} = 2r\,dr$ и

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} f(r)\,\vec{r}\,d\vec{r} = \int\limits_{r_B}^{r_C} f(r)\,r\,dr$$

т.е. линейный интеграл поля сведен к определенному интегралу.

Пример 1. Вычислить работу силы $\vec{F} = \left\{ x^2, -yz, z \right\}$ по прямолинейному перемещению из точки $B(1, 2, -1)$ в точку $C(3, 3, 2)$.

Решение. Работа A силы $\vec{F}$ вычисляется по формуле

$$A = \int_{\cup BC} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\cup BC} x^2 dx - yz\, dy + z\, dz$$.

Для вычисления этого интеграла составим уравнение прямой BC:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z+1}{2+1} = t$$.

Отсюда $x = 2t+1,\ y = t+2,\ z = 3t-1; \quad dx = 2dt,\ dy = dt,\ dz = 3dt.$

Найдем значение параметра t, соответствующее точке B. Для этого подставим абсциссу $x=1$ точки B в формулу $x = 2t+1$. Получим $t_B = 0$. Аналогично найдем $t_C = 1$. Заменяя в интеграле x, y, z, dx, dy, dz их выражениями, получим

$$A = \int_{\cup BC} x^2 dx - yz\, dz + z\, dz = \int_0^1 \left[(2t+1)^2 \cdot 2 - (t+2)(3t-1) + (3t-1)\cdot 3 \right] dt = 26/3$$.

Пример 2. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ вдоль линии $OABO$, где OB — дуга параболы $y^2 = x$, OAB — ломаная (рис. 1).

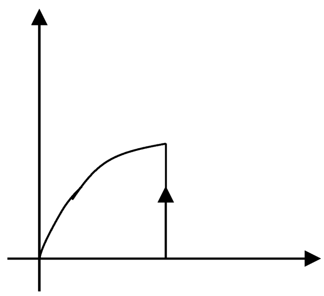


Рис. 1

Решение. Циркуляцию поля $\vec{a}$ вычислим по формуле

$$C(\vec{a}) = \oint_{OABO} \vec{a}\, d\vec{r} \int_{[OA]} \vec{a}\, d\vec{r} + \int_{[AB]} \vec{a}\, d\vec{r} + \int_{\cup BO} \vec{a}\, d\vec{r}$$.

На отрезке OA имеем $y = 0,\ dy = 0$. Поэтому

$$I_1 = \int_{[OA]} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{[OA]} y\, dx + 2x\, dy = 0$$.

0

На отрезке AB имеем $x = 1,\ dx = 0,\ 0 \le y \le 1$. Поэтому

$$I_2 = \int_{[AB]} y\, dx + 2x\, dy = \int_0^1 2\, dy = 2$$.

На дуге BO имеем $x = y^2,\ y = y\ (y - \text{параметр}),\ dx = 2y\, dy,\ \ y_B = 1,\ y_O = 0$. Поэтому

$$I_3 = \int\limits_{\cup BO} y\,dx + 2x\,dy = \int\limits_1^0 \left(y \cdot 2y + 2y^2 \right) dy = \int\limits_1^0 4y^2 dy = \frac{-4}{3}.$$

Окончательно, $C(\vec{a}) = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Пример 3. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = \left\{ -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right\}$ по окружности (L) радиусом R с центром в начале координат, ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Циркуляция поля $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint\limits_{(L)} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

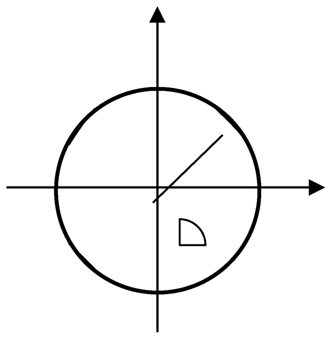


Рис. 68

Для вычисления этого интеграла запишем параметрические уравнения окружности (L): $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t$.

Тогда $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$; угол t при движении против часовой стрелки меняется от 0 до 2π (рис. 2). Поэтому

Рис. 2

$$C(\vec{a}) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R\sin t \cdot (-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

1. Формулы Грина и Стокса. Ротор поля

Часто удобно вычислять циркуляцию плоского поля по формуле Грина, а циркуляцию пространственного поля

— по формуле Стокса.

Если при обходе замкнутого контура ограниченная область остается слева,

то направление обхода называют положительным. Обход в противоположном направлении называют отрицательным.

Теорема 1. Пусть функции $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в области (D) с положительно ориентированной границей (L). Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\oint\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$
.

Доказательство проведем для области (D), описываемой неравенствами $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\;\; a \le x \le b$ (рис. 3).

0

$y = \varphi_1(x)$

Рис. 3

$y = \varphi_2(x)$

a

b

x

y

M

A

B

K

Сначала проверим равенство

$$\oint\limits_{(L)} P\,dx = -\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$$
.

Сведем криволинейный интеграл $\oint\limits_{L} P(x, y)\,dx$ к определенному интегралу, подставляя $y = \varphi_1(x)$ на линии AKB и $y = \varphi_2(x)$ на линии BMA:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\cup AKB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\cup BMA} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx + \int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))\,dx,$$

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \left[P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\right]dx.$$

Теперь преобразуем двойной интеграл, сведя его сначала к повторному, а затем к определенному интегралу:

$$-\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int\limits_a^b dx\left[P(x,y)\right]\Bigg|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = \int\limits_a^b \Big[P\big(x,\varphi_1(x)\big) - P\big(x,\varphi_2(x)\big)\Big]dx$$

.

И криволинейный, и двойной интегралы из формулы (11.6) равны одному и тому же определенному интегралу и, следовательно, равны между собой. Аналогично проверяется равенство

$$\oint\limits_{(L)} Q\,dy = \iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

.

Складывая равенства, получим формулу Грина.

Замечание. Нарушение условий теоремы Грина может привести к неверным результатам. Например, для поля $\vec{a} = \left\{-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right\}$ нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

,

но циркуляция поля по окружности (L) с центром в начале координат отлична от нуля, $C(\vec{a}, L) = 2\pi$. В этом примере нарушены условия теоремы Грина, т.к. внутри контура (L) содержится точка $(0,0)$, в которой функции $P(x,y),\ Q(x,y)$ не определены.

Пример 4. Используя формулу Грина, вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ вдоль линии $OABO$ (рис. 3).

Решение. Вычислим циркуляцию $C = \oint\limits_{OABO} y\,dx + 2x\,dy$, используя формулу Грина для $P = y,\ Q = 2x$:

$$C = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^1 dx = \int\limits_0^1 \left(1 - y^2\right) dy = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Для обобщения формулы Грина на пространственный случай введем понятие ротора векторного поля $\vec{a}$.

Ротором векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{a}.$$

При вычислении $\operatorname{rot}\vec{a}$ следует разложить определитель по элементам первой строки. Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial x} P = \dfrac{\partial P}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial x} Q = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y} R = \dfrac{\partial R}{\partial y}$ и т. д., получим

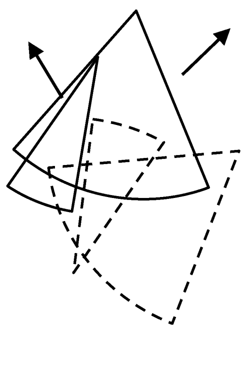
$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Понятие ротора позволяет удобно вычислять циркуляцию векторного поля, опираясь на следующую теорему (доказательство теоремы опустим).

Теорема 2. Пусть функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ и их частные производные непрерывны на ориентированной поверхности (σ), натянутой на контур (L), причем ориентации контура (L) и поверхности (σ) согласованы. Тогда имеет место следующая формула Стокса:

$$\oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \overrightarrow{d\sigma}.$$

В этой формуле ориентации контура (L) и поверхности (σ) согласованы, т. е., глядя с конца выбранных нормальных векторов поверхности (σ), обход контура (L) виден против часовой стрелки (рис. 4).



(L)

(σ)

$\vec{n}$

$\vec{n}$

Рис. 4

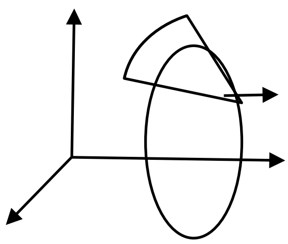
Итак, по формуле Стокса циркуляция поля $\vec{a}$ по контуру (L) равна потоку ротора поля $\vec{a}$ через поверхность (σ), натянутую на контур (L).

Пример 5. Для поля $\vec{a} = \left(20x^4 + 1\right) z\vec{i} - 5y\,\vec{j} + 4x^5\vec{k}$ найти его циркуляцию по окружности $x^2 + z^2 = 9$, лежащей в плоскости $y = 4$ и ориентированной против часовой стрелки, если смотреть с конца оси OY (рис. 5).

Решение. Циркуляция поля $\vec{a}$ вычисляется по формуле $C = \oint \vec{a}\, d\,\vec{r}$. Непосредственное вычисление этого интеграла достаточно трудоемко. Посмотрим, облегчит ли вычисление циркуляции применение формулы Стокса. Для этого вычислим ротор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(20x^4 + 1\right) z & -5y & 4x^5 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(0 - 0\right) - \vec{j}\left(20x^4 - 20x^4 - 1\right) + \vec{k}\left(0 - 0\right) = \vec{j}.$$

По формуле Стокса имеем:



z

y

x

4

Рис. 5

0

$\vec{n}$

$$C = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\,\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\, \overrightarrow{d\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma$$

.

В качестве поверхности (σ), натянутой на окружность, возьмем круг, ограниченный этой окружностью. Нормальный вектор к этой поверхности направлен вдоль оси OY, т.е. $\vec{n}=\vec{j}$; скалярное произведение

$$\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\left|\vec{j}\right|^2=1;$$

$$C=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=S=\pi R^2=9\pi.$$

Остановимся более подробно на свойствах ротора.

2 Физический смысл ротора

Пусть твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найдем поле линейных скоростей точек тела и ротор этого поля.

Рассмотрим систему координат, направив ось Oz по оси вращения (рис. 6). Как известно из кинематики, линейная скорость $\vec{v}$ точки M равна векторному произведению $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M, $\vec{r}=\{x,y,z\}$, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, направленный по оси вращения с длиной, равной величине угловой скорости ω, т. е. $\vec{\omega}=\omega\vec{k}=\{0,0,\omega\}$.

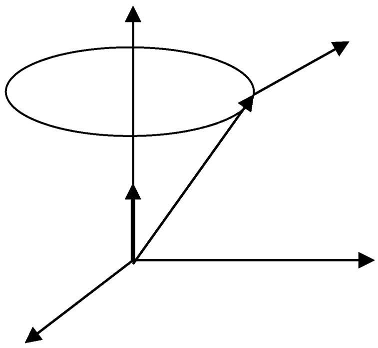


Рис. 6

Найдем поле линейных скоростей:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega\\x&y&z\end{vmatrix}=-\omega y\,\vec{i}+\omega x\,\vec{j}.$$

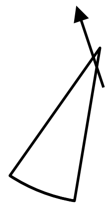
Ротор этого поля вычислим по формуле:

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\-\omega y&\omega x&0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}0-\frac{\partial}{\partial z}(\omega x)\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}0-\frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\omega x)-\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right.$$

Таким образом, ротор поля линейных скоростей в любой точке равен удвоенному вектору угловой скорости.

В произвольном поле его ротор, вычисленный в точке M, также характеризует вращательную способность поля в этой точке.

3 Инвариантное определение ротора



(L)

(σ)

$\bullet M$

Рис. 7

$\vec{n}$

Рассмотрим некоторую поверхность (σ), содержащую точку M, и единичный нормальный вектор $\vec{n}$ этой поверхности (рис. 7). Вычислим по формуле Стокса циркуляцию поля $\vec{a}$ по произвольному контуру (L), лежащему на поверхности (σ):

$$C(\vec{a}, L) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\ \overrightarrow{d\sigma} = \iint\limits_{(\sigma)} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma .$$

Воспользуемся теоремой о среднем для поверхностного интеграла 1-го рода:

$$C(\vec{a}, L) = \iint\limits_{(\sigma)} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})_M \cdot \sigma = \left(\text{пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{a}\right)_M \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow \quad \left(\text{пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{a}\right)_M = \frac{C(\vec{a}, L)}{\sigma} .$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при стягивании поверхности (σ) в точку M, получим:

$$\left(\text{пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{a}\right)_M = \lim_{\substack{(\sigma) \to M \\ (\sigma) \perp \vec{n}}} \frac{C(\vec{a}, L)}{\sigma} .$$

Эту величину называют плотностью циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M в направлении вектора $\vec{n}$. Плотность циркуляции, как проекция $\text{пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{a}$, принимает наибольшее значение, равное $\left|\operatorname{rot}\vec{a}\right|$, когда векторы $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\vec{n}$ сонаправлены. Поэтому получаем следующее инвариантное (не зависящее от системы координат) определение ротора.

Ротор поля $\vec{a}$ в точке M есть вектор, удовлетворяющий условиям:

а) в направлении этого вектора плотность циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M принимает наибольшее значение,

б) по величине он равен наибольшей плотности циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M.

15.4 Дифференциальные свойства ротора

1) $\operatorname{rot}\vec{c}=0,$ или $\vec{\nabla}\times\vec{c}=0,$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

2) $\operatorname{rot}\vec{r}=0,$ или $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0,$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор),

3) $\operatorname{rot}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b},$ или $\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{a}+\vec{\nabla}\times\vec{b},$

4) $\operatorname{rot}(f\,\vec{a})=f\,\operatorname{rot}\vec{a}+(\operatorname{grad}f)\times\vec{a},$ или $\vec{\nabla}\times(f\,\vec{a})=f\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{a},$

(f – скалярное поле, $\vec{a}$ – векторное поле),

5) $\operatorname{rot}(c\vec{a})=c\,\operatorname{rot}\vec{a},$ или $\vec{\nabla}\times(c\vec{a})=c\,\vec{\nabla}\times\vec{a},$ (c – константа),

6) $\operatorname{rot}(f\,\vec{c})=(\operatorname{grad}f)\times\vec{c},$ или $\vec{\nabla}\times(f\,\vec{c})=\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{c},$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

7) $\operatorname{rot}f(r)\,\vec{r}=0$ или $\vec{\nabla}\times\left(f(r)\,\vec{r}\right)=0$.

Проверим эти свойства:

свойства 1) – 3) проверяются непосредственным вычислением,

$$4)\ \operatorname{rot}(f\cdot\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f\,P & f\,Q & f\,R\end{vmatrix}=f\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=f\,\operatorname{rot}\vec{a}+(\operatorname{grad}f)\times\vec{a}$$

свойство 5) есть следствие свойства 4) при $f=c$,

свойство 6) есть следствие свойства 4) при $\vec{a}=\vec{c}$,

7) по свойству 4) ротора $\operatorname{rot}f(r)\,\vec{r}=f(r)\,\operatorname{rot}\vec{r}+\left(\operatorname{grad}f(r)\right)\times\vec{r}$, а по свойствам градиента $\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\,\operatorname{grad}r=f'(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$. Учитывая, что $\operatorname{rot}\vec{r}=0,\ \vec{r}\times\vec{r}=0$, получим

$$\operatorname{rot} f(r)\,\vec{r} = f(r)\operatorname{rot}\vec{r} + \left(f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{r} = 0$$
.

5. Условия независимости линейного интеграла от формы пути

В различных приложениях важно знать, зависит ли линейный интеграл поля $\int \vec{a}\,d\vec{r}$ от формы кривой интегрирования или он зависит только от начальной и конечной точек этой кривой (с физической точки зрения – зависит ли работа силы от формы пути). Рассмотрим три условия независимости линейного интеграла поля от формы пути интегрирования. Как и раньше, будем предполагать, что вектор-функция $\vec{a}(M)=\{P(M),\,Q(M),\,R(M)\}$ дифференцируема.

Теорема (о равенстве нулю циркуляции). Для того чтобы линейный интеграл поля не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция поля по любой замкнутой кривой равнялась нулю.

Доказательство. Вычислим циркуляцию поля $\vec{a}$ по произвольной замкнутой кривой $ABCDA$ (рис. 8)

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{\cup ABCDA} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup ABC} \vec{a}\,d\vec{r} + \int\limits_{\cup CDA} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup ABC} \vec{a}\,d\vec{r} - \int\limits_{\cup ADC} \vec{a}\,d\vec{r}.$$

Из этого равенства следует: циркуляция $C(\vec{a})$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\cup ABC} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup ADC} \vec{a}\,d\vec{r}$, т. е. интеграл $\int \vec{a}\,d\vec{r}$ по двум произвольным линиям с общим началом и общим концом принимает одно и то же значение и, значит, не зависит от формы пути интегрирования.

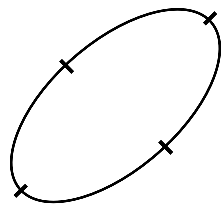


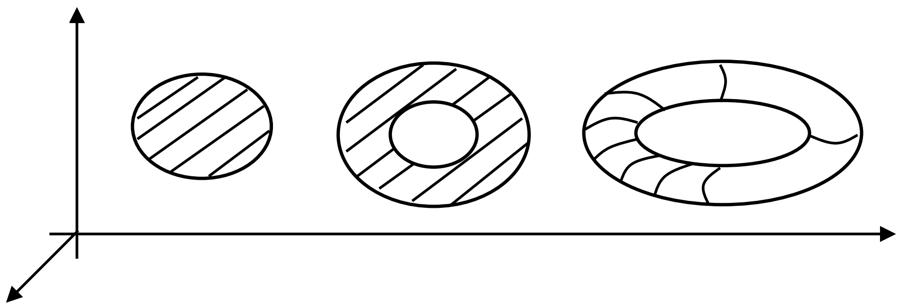
Рис.74

Рис. 8

Теорема дает критерий независимости линейного интеграла поля от формы пути интегрирования, однако этот критерий трудно проверить.

Для формулировки следующего более эффективного критерия введем новое понятие. Область назовем односвязной, если на любой ее замкнутый контур можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Например, односвязными областями будут круг, шар, куб; к неодносвязным областям относятся кольцо, тор (“бублик”) (рис. 9).



y y

x x

Рис. 43

Рис.9

y

z

0

x

Теорема (о равенстве нулю ротора). Для того чтобы линейный интеграл поля не зависел от формы пути интегрирования, необходимо, а для односвязного поля и достаточно, чтобы ротор поля в каждой точке равнялся нулю.

Необходимость. Пусть линейный интеграл поля $\vec{a}$ не зависит от формы пути интегрирования и, значит, циркуляция $C(\vec{a}, L)$ по любому замкнутому контуру равна нулю. Тогда по формуле

$$\left(\text{пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a}\right)_M = \lim_{\substack{(\sigma) \to M \\ (\sigma) \perp \vec{n}}} \frac{C(\vec{a}, L)}{\sigma} = 0,$$

т.е. проекция ротора на любой вектор $\vec{n}$ в любой точке M равна нулю. Поэтому

$\operatorname{rot}\vec{a}=0$ в любой точке поля.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$ в односвязной области (D). Возьмем любой замкнутый контур (L) в (D). В силу односвязности области (D) на контур (L) можно натянуть поверхность (σ), целиком лежащую в области (D). Вычислим циркуляцию поля $\vec{a}$ по контуру (L), используя формулу Стокса и условие $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$:

$$C(\vec{a},L)=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{(\sigma)}\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma=0.$$

Так как циркуляция поля $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру (L) равна нулю, то

по теореме интеграл $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути. Теорема доказана.

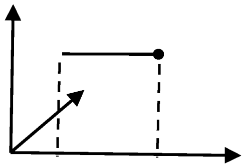
Теорема (о подынтегральном выражении). Для того чтобы линейный интеграл поля $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $\vec{a}\,d\vec{r}$ было полным дифференциалом некоторой функции U.

Необходимость. Пусть $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути. Покажем, что функция $U(M)=\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}$ есть искомая функция (M_0 — фиксированная точка), т.е. $\vec{a}\,d\vec{r}=dU$.

Для этого вычислим частное приращение

$$\Delta_x U=U\left(x+\Delta x,y,z\right)-U\left(x,y,z\right)=U\left(M_1\right)-U\left(M\right)=\int\limits_{(M_0M_1)}\vec{a}\,d\vec{r}-\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}.$$

Так как интеграл $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути, то кривую M_0M выберем произвольно, а в качестве кривой M_0M_1 возьмем кривую M_0M и отрезок прямой MM_1 (рис. 76). Тогда по свойству аддитивности интеграла



z

y

Рис. 76

0

M

M_0

M_1

x

$x+\Delta x \quad x$

$$\Delta_x U = \int\limits_{(M_0M_1)} \vec{a}\,d\vec{r} - \int\limits_{(M_0M)} \vec{a}\,d\vec{r} = \left[\int\limits_{(M_0M)} \vec{a}\,d\vec{r} + \int\limits_{(MM_1)} \vec{a}\,d\vec{r}\right] - \int\limits_{(M_0M)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(MM_1)} \vec{a}\,d\vec{r}.$$

Запишем интеграл в координатной форме и учтем, что на отрезке MM_1 меняется только x, а $y,\, z-$ постоянны, значит, $dy=0,\ dz=0$ и

$$\Delta_x U = \int\limits_{(MM_1)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(MM_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,z)\,dx.$$

К получившемуся определенному интегралу применим теорему о среднем:

$$\Delta_x U = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,z)\,dx = P(\tilde{x},y,z)\cdot\Delta x;$$

здесь $\tilde{x}-$ некоторая промежуточная точка между x и $x+\Delta x$. Тогда

$$U'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\tilde{x},y,z)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(\tilde{x},y,z) = P(x,y,z).$$

Итак, $U'_x = P(x,y,z)$. Аналогично можно показать, что $U'_y = Q(x,y,z),\ U'_z = R(x,y,z)$. Тогда

$$\vec{a}\,d\vec{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U'_x\,dx + U'_y\,dy + U'_z\,dz = dU.$$

Достаточность. Пусть существует функция $U(x, y, z)$ такая, что $\vec{a}\,d\vec{r} = dU$.

Рассмотрим произвольную дугу AB с параметрическими уравнениями

$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t);\ \ t \in [t_A; t_B]$.

Сведем интеграл $\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r}$ по этой дуге к определенному интегралу и применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} dU(x, y, z) = \int\limits_{t_A}^{t_B} dU\big(x(t), y(t), z(t)\big) = U\big(x(t), y(t), z(t)\big)\Big|_{t_A}^{t_B} =$$

$$= U\big(x_B, y_B, z_B\big) - U\big(x_A, y_A, z_A\big) = U(B) - U(A).$$

Таким образом, значение интеграла $\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r}$ зависит только от точек A, B и не зависит от формы линии AB.

Потенциальное поле.

Как и раньше, предполагаем, что координаты вектора поля $\vec{a}$ – функции P, Q, R непрерывны и имеют частные производные.

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***потенциальным,*** если оно является ***полем градиента*** некоторой скалярной функции U, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad} U$; при этом функцию U называют ***скалярным потенциалом*** векторного поля.

Напомним, что $\operatorname{grad} U = U'_x \vec{i} + U'_y \vec{j} + U'_z \vec{k}$. Так как $\operatorname{grad}(U + C) = \operatorname{grad} U$, то $U + C$ также является потенциалом.

Свойства потенциального поля

1). Поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом U тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot d\vec{r} = dU$.

2). Односвязное поле $\vec{a}$ потенциально тогда и только тогда, когда в каждой точке поля $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

3). В потенциальном поле линейный интеграл $\int\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r}$ не зависит от формы пути.

4). В потенциальном поле циркуляция по любому контуру, не охватывающему особых точек поля, равна нулю.

5). В потенциальном поле циркуляции по контурам, охватывающим все особые точки поля, равны между собой.

6). В потенциальном поле линейный интеграл по дуге равен разности потенциалов конца и начала дуги.

Пусть $(L),\ (l)$ – контуры, окружающие все особые точки $P_1, \ldots, P_n$ поля; ориентируем контуры так, чтобы при обходе ограниченная ими область (σ) оставалась слева, т.е. (L)– против часовой стрелки, (l)– по часовой стрелке; контуры с такой ориентацией обозначим соответственно $(L^+),\ (l^-)$. На поверхности (σ) с границей $(\gamma) = (L^+) \cup (l^-)$ поле потенциально, и потому $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ по свойству 3) и теореме. Тогда по формуле Стокса

$$\oint\limits_{(\gamma)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\,\overrightarrow{d\sigma} = 0.$$

С другой стороны,

$$\oint\limits_{(\gamma)} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint\limits_{(L^+)} \vec{a}\,d\vec{r} + \oint\limits_{(l^-)} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint\limits_{(L^+)} \vec{a}\,d\vec{r} - \oint\limits_{(l^+)} \vec{a}\,d\vec{r},$$

и, следовательно, $\oint\limits_{(L^+)} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint\limits_{(l^+)} \vec{a}\,d\vec{r}$.

6). Если поле $\vec{a}$ потенциально и U — его потенциал, то $\vec{a}\,d\vec{r} = dU$ и по формуле

$$\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} dU = U(B) - U(A).$$

В силовом потенциальном поле свойства 3 и 6 означают, что работа сил поля по дуге не зависит от формы дуги и равна разности потенциалов конца и начала дуги.

Рассмотрим способы отыскания потенциала U поля $\vec{a}$.

Отыскание потенциала по выражению $\vec{a}\,d\vec{r}$

Воспользуемся первым свойством потенциального поля. Если удается представить выражение $\vec{a}\,d\vec{r}$ в виде полного дифференциала некоторой функции U, то поле $\vec{a}$ — потенциально, а U — его потенциал.

Пример 1. Показать, что поле $\vec{a}$ потенциально и найти его потенциал, если

1) $\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 4z^3\vec{k}$, 2) $\vec{a} = \{yz, xz, xy\}$, 3) $\vec{a} = \dfrac{\{x, y, z\}}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$.

Решение

1). $\vec{a}\cdot d\vec{r} = 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz = d\left(x^2\right) + d\left(y^3\right) + d\left(z^4\right) = d\left(x^2 + y^3 + z^4\right)$.

Следовательно, поле $\vec{a}$ — потенциально; $U = x^2 + y^3 + z^4$ — его потенциал.

2). $\vec{a}\,d\vec{r} = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = d(xyz)$.

Следовательно, поле $\vec{a}$ потенциально; $U = xyz$ — его потенциал.

3). $$\vec{a}\,d\vec{r} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)\right).$$

Следовательно, поле $\vec{a}$ — потенциально; $U = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)$ — его потенциал.

Отыскание потенциала по определению

Для потенциального поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и его потенциала U имеем $\operatorname{grad} U = \vec{a}$ или в координатной форме

$$U'_x = P, \;\; U'_y = Q, \;\; U'_z = R\,.$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x; при этом появится константа, не зависящая от переменной интегрирования x (но зависящая от y, z):

$$U = \int P(x, y, z)\,dx + c(y, z)\,.$$

Для отыскания функции $c(y, z)$ следует подставить получившуюся функцию $U(x, y, z)$ во второе и третье равенства.

Пример 2. Проверить, что поле $\vec{a} = \left(\frac{z}{y} + x\right)\vec{i} - \frac{xz}{y^2}\vec{j} + \left(\frac{x}{y} + 1\right)\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

Решение. Для данного поля проверить его потенциальность и найти потенциал по выражению $\vec{a}\,d\vec{r}$ сложно. Поэтому потенциальность поля проверим по условию $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, а потенциал найдем исходя из формул. Итак, вычислим ротор:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{z}{y} + x & \dfrac{-xz}{y^2} & \dfrac{x}{y} + 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2}\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right) + \vec{k}\left(-\frac{z}{y^2} + \frac{z}{y^2}\right) = \vec{0}\,.$$

Значит поле $\vec{a}$ потенциально и его потенциал U удовлетворяет условию $\operatorname{grad} U = \vec{a}$ или в координатной форме

$$U'_x = \frac{z}{y} + x, \quad U'_y = -\frac{xz}{y^2}, \;\; U'_z = \frac{x}{y} + 1.$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x

$$U=\int\left(\frac{z}{y}+x\right)dx=\frac{z}{y}x+\frac{x^2}{2}+c(y,z)$$

и подставим получившуюся функцию $U(x,y,z)$ во второе и третье равенства:

$$U'_y=\frac{-xz}{y^2}+c'_y(y,z)=\frac{-xz}{y^2},\quad U'_z=\frac{x}{y}+c'_z(y,z)=\frac{x}{y}+1.$$

Отсюда $c'_y=0,\ c'_z=1.$ Следовательно, $c(y,z)=z+c_1$, где c_1 — константа. Поэтому

$$U=\frac{z}{y}x+\frac{x^2}{2}+z+c_1.$$

Отыскание потенциала центрального поля $\vec{a}=f(r)\vec{r}$

Воспользуемся соотношением $\vec{r}^{\,2}=r^2,$ где $r=|\vec{r}\,|$. Тогда $d\,\vec{r}^{\,2}=dr^2,$ $2\vec{r}\cdot d\,\vec{r}=2r\cdot dr$ и, значит, $\vec{r}\,d\,\vec{r}=r\,dr$. Поэтому

$$\vec{a}\cdot d\,\vec{r}=f(r)\vec{r}\cdot d\,\vec{r}=f(r)r\,dr.$$

Введем функцию $U=\int f(r)r\,dr$. Так как $U'_r=f(r)r$, то $\vec{a}\,d\,\vec{r}=f(r)r\,dr=U'(r)dr=dU$. Следовательно, по свойству 1

центральное поле $\vec{a}=f(r)\vec{r}$ потенциально и его потенциал $U=\int f(r)r\,dr$.

Пример 3. Найти потенциал поля напряженностей $\vec{E}=\dfrac{1}{r^3}\vec{r}$.

Решение. Поле $\vec{E}$ — центральное, следовательно, оно потенциальное, и его потенциал $U=\int\frac{1}{r^3}r\,dr=\int\frac{1}{r^2}dr=-\frac{1}{r}+C$.

Соленоидальное поле.

Поле $\vec{a}$ называют соленоидальным, если оно является полем ротора некоторой векторной функции $\vec{b}$, т.е. $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$; при этом вектор $\vec{b}$ называют векторным потенциалом поля $\vec{a}$.

1 Свойства соленоидального поля

1). Поле $\vec{a}$ является соленоидальным тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

2). В соленоидальном поле поток через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек поля, равен нулю.

3). В соленоидальном поле потоки через замкнутые поверхности, окружающие все особые точки поля, равны между собой.

4). В соленоидальном поле поток через любое поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое интенсивностью трубки).

Проверим эти свойства.

1). Пусть поле $\vec{a}$ – соленоидально, т.е.

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial b_3}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k};$$

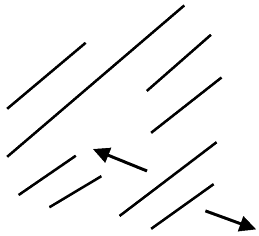
тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial b_3}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b_3}{\partial y \partial x}\right) + \left(-\frac{\partial^2 b_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 b_2}{\partial z \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial z \partial y}\right) = 0;$$

можно показать, что справедливо и обратное: если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$.

2). В соленоидальном поле $\operatorname{div}\vec{a}=0$ и потому по формуле Остроградского поток через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек поля,



(σ_1^+)

$\vec{n}_1$

(σ_2^-)

$\vec{n}_2$

Рис. 1

78

(V)

$$\Pi_\sigma = \oiint\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\,dV = 0$$

.

3). Пусть $(\sigma_1^+),\ (\sigma_2^-)$ — поверхности, окружающие все особые точки поля; их ориентация указана на рис. 1. Обозначим через (V) — тело с границей $(\sigma)=(\sigma_1^+)\cup(\sigma_2^-)$; внутри тела (V) поле определено, $\operatorname{div}\vec{a}=0$, и потому по формуле Остроградского

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\,dV = 0$$

.

С другой стороны, $\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1^+} + \Pi_{\sigma_2^-} = \Pi_{\sigma_1^+} - \Pi_{\sigma_2^+}$ и следовательно, $\Pi_{\sigma_1^+} = \Pi_{\sigma_2^+}$.

4). Рассмотрим векторную трубку поля, т.е. совокупность его векторных линий, пересекающих некоторую замкнутую линию (рис. 79). Пусть $(\sigma_1^+),(\sigma_2^+)-$ поперечные сечения векторной трубки с указанной на рис. 79 ориентацией; $(\sigma_3)-$ поверхность векторной трубки, состоящая из векторных линий; $(\sigma)=(\sigma_1^-)\cup(\sigma_2^+)\cup(\sigma_3)-$ граница тела (V).

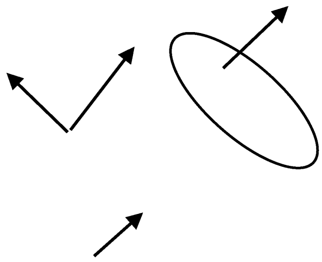


Рис. 2

(σ_1)

(σ_2)

(σ_3)

$\vec{n}$

$\vec{a}$

Вычислим поток поля через поверхность (σ): с одной стороны, по свойству 2) этот поток равен нулю; с другой стороны,
$\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1^-} + \Pi_{\sigma_2^+} + \Pi_{\sigma_3} = -\Pi_{\sigma_1^+} + \Pi_{\sigma_2^+} + \Pi_{\sigma_3}$, а $\Pi_{\sigma_3} = \int\limits_{(\sigma_3)} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = 0$, т.к. (σ_3) состоит из векторных линий, значит, вектор поля $\vec{a}$ направлен по касательной к векторной линии, т.е. $\vec{a} \perp \vec{n}$ и $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$. Следовательно, $\Pi_\sigma = -\Pi_{\sigma_1^+} + \Pi_{\sigma_2^+} = 0$ или $\Pi_{\sigma_1^+} = \Pi_{\sigma_2^+}$.

Пример 1. Найти поток поля напряженностей $\vec{E} = \dfrac{q}{r^3}\vec{r}$, создаваемого зарядом q, через произвольную замкнутую поверхность (σ).

Решение. Дивергенция поля $\vec{E}$ равна нулю, потому поле напряженностей $\vec{E}$ является соленоидальным всюду, где определено (т.е. в точках $r \neq 0$, отличных от начала координат).

Тогда по свойству 2) соленоидального поля поток поля через любую замкнутую поверхность, не окружающую начала координат, равен нулю.

По свойству 3) соленоидального поля поток поля через замкнутую поверхность, окружающую начало координат, равен, например, потоку этого поля через сферу с центром в начале координат и равен $4\pi q$.

2 Отыскание векторного потенциала

Прежде всего отметим, что векторный потенциал $\vec{b}$ соленоидального поля $\vec{a}$ определяется с точностью до градиента произвольной функции.

Действительно, так как поле $\operatorname{grad} U -$ потенциально, то $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0$ и потому

$$\operatorname{rot}\left(\vec{b} + \operatorname{grad} U\right) = \operatorname{rot}\vec{b} + \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \operatorname{rot}\vec{b} = \vec{a};$$

значит, вектор $\vec{b} + \operatorname{grad} U$ также является векторным потенциалом поля $\vec{a}$. Поэтому подбором вектора $\operatorname{grad} U$ можно добиться того, чтобы одна из координат векторного потенциала $\vec{b}$ равнялась нулю, т.е. можно искать векторный потенциал, например, в виде $\vec{b} = \{b_1, b_2, 0\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{b} = \vec{a}$, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то получим систему уравнений

$$-\frac{\partial b_2}{\partial z} = P, \ \frac{\partial b_1}{\partial z} = Q, \ \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = R.$$

Проинтегрируем первое и второе из равенств по z:

$$b_2 = -\int P\,dz + \varphi(x, y), \ b_1 = \int Q\,dz + \psi(x, y);$$

здесь $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – произвольные функции, не зависящие от переменной интегрирования z. Подставляя найденные b_2, b_1 в третье из равенств, найдем функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$.

Пример 2. Проверить соленоидальность поля $\vec{a} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k}$ и найти его векторный потенциал.

Решение. Так как $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-z) + \frac{\partial}{\partial z}(2x) = 0$, то поле соленоидально, т.е. $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$. Будем искать векторный потенциал в виде $\vec{b} = \{b_1, b_2, 0\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{b} = \vec{a} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k}$, то получим систему уравнений

$$\frac{\partial b_2}{\partial z} = -2y,\ \frac{\partial b_1}{\partial z} = -z,\ \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = 2x.$$

Проинтегрируем первое и второе из этих равенств по z:

$$b_2 = -\int 2y\,dz = -2yz + \varphi(x, y),$$

$$b_1 = \int -z\,dz = -\frac{z^2}{2} + \psi(x, y).$$

Подставив эти выражения для b_2, b_1 в третье из равенств, получим

$$\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = \varphi'_x(x, y) - \psi'_y(x, y) = 2x.$$

В частности, можно взять $\psi(x, y) = 0,\ \varphi(x, y) = x^2$. Тогда векторный потенциал

$$\vec{b} = \{b_1, b_2, 0\} = \left\{-\frac{z^2}{2}, -2yz + x^2, 0\right\}.$$

Гармонические поля

1 Гармоническое скалярное поле

Скалярное поле f называется гармоническим, если функция f удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = 0.$$

Правая часть уравнения Лапласа называется оператором Лапласа и обозначается Δf. Оператор Лапласа будет использован в дальнейшем при решении задач математической физики (задач колебания, теплопроводности, диффузии).

В прямоугольной системе координат

$$\mathrm{grad}\, f = \{f'_x, f'_y, f'_z\},\ \ \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = (f'_x)'_x + (f'_y)'_y + (f'_z)'_z = \Delta f$$

и уравнение Лапласа примет вид

$\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0$.

Пример 1. Показать, что поле $f(r) = \dfrac{1}{r}$ является гармоническим в пространстве R_3, а поле $f(r) = \ln r$ является гармоническим в пространстве R_2.

Решение. 1). По свойствам градиента $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r} = \left(\dfrac{1}{r}\right)' \operatorname{grad} r = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

По свойствам дивергенции $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right) = \operatorname{div}\left(\dfrac{-1}{r^3}\vec{r}\right) = -\left(\dfrac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\dfrac{1}{r^3}\right)$.

Учитывая, что $\vec{r} = \{x, y, z\},\ \operatorname{div}\vec{r} = 3$ в пространстве R_3, $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r^3} = \dfrac{-3}{r^4}\dfrac{\vec{r}}{r}$, получим:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{3}{r^3} - \vec{r}\cdot\vec{r}\,\frac{3}{r^5}\right) = 0.$$

2). В пространстве R_2 для поля $f(r) = \ln r$ имеем:

$$\operatorname{grad}\ln r = (\ln r)' \operatorname{grad} r = \frac{1}{r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r^2},\quad \vec{r} = \{x, y\},\ \operatorname{div}\vec{r} = 2,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\ln r) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r^2}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^2}\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^2} + \vec{r}\cdot\frac{-2}{r^3}\frac{\vec{r}}{r} = 0.$$

2 Гармоническое векторное поле

Векторное поле $\vec{a}$, являющееся одновременно и потенциальным, и соленоидальным, называется **гармоническим** векторным полем.

Отметим следующие свойства гармонического векторного поля.

1). Гармоническое векторное поле обладает скалярным и векторным потенциалом.

2). Скалярный потенциал U является функцией гармонической.

3). Для гармонического векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ его координаты P, Q, R являются функциями гармоническими.

Проверим эти свойства.

1). Первое свойство следует из определения, т.к. потенциальное поле обладает скалярным потенциалом, а соленоидальное поле обладает векторным потенциалом.

2). Так как гармоническое поле $\vec{a}$ потенциально, то оно обладает скалярным потенциалом U и представимо в виде $\vec{a} = grad\,U$. С другой стороны, гармоническое поле является соленоидальным, поэтому

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = 0.$$

Таким образом, потенциал U гармонического поля $\vec{a}$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической функцией.

3). Для гармонического векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ в силу его потенциальности $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

В силу соленоидальности гармонического векторного поля $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$. Продифференцируем это равенство по x

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0$$

и воспользуемся вторым и третьим из равенств (12.5):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Это значит, что функция P является гармонической. Аналогично можно показать, что функции Q, R являются гармоническими.

4 Повторные операции теории поля

1). Рассмотрим скалярное поле U. В нем определен вектор $\operatorname{grad} U$.

В векторном поле $\operatorname{grad} U$ определены понятия дивергенции и ротора

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U), \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U).$$

2). Рассмотрим векторное поле $\vec{a}$. В нем определены скаляр $\operatorname{div}\vec{a}$ и вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$. Для скалярного поля $\operatorname{div}\vec{a}$ определено понятие градиента

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}).$$

Для векторного поля $\operatorname{rot}\vec{a}$ определены понятия дивергенции и ротора

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}), \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}).$$

Рассмотрим каждую из этих операций более подробно.

Выражение $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ есть оператор Лапласа ΔU;

Так как поле $\operatorname{grad} U$ является потенциальным, а в потенциальном поле ротор равен нулю, то $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0$.

Так как поле $\operatorname{rot}\vec{a}$ является соленоидальным, а в соленоидальном поле дивергенция равна нулю, то $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$.

Выражения $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})$ используются в электродинамике и связаны соотношением (которое будет установлено позже)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a}.$$

Здесь $\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a} = \Delta\vec{a}$ для вектора $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ понимают как $\Delta\vec{a} = \{\Delta P, \Delta Q, \Delta R\}$.